



Comprehensive Intersection Systems and Their Computational Algorithms

Mahdi Dehghani Darmian*¹ 

¹Assistant Professor, Department of Basic Sciences, Technical and Vocational University (TVU), Tehran, Iran.

ARTICLE INFO

Article Type:

Original Research

Received: 09.03.2025

Revised: 26.05.2025

Accepted: 03.09.2025

Keyword:

INTERSECT algorithm
CIS algorithm
Gröbner systems
parametric polynomial ideals
comprehensive intersection system
monomial ordering

*Corresponding Author:

Mahdi Dehghani Darmian

Email:

mdehghanidarmian@tvu.ac.ir
m.dehghanidarmian@ipm.ir

ABSTRACT

This paper introduces the intersection of polynomial ideals with parametric coefficients using Gröbner systems. Building on the existing understanding of polynomial ideals with numeric coefficients, we propose an intersection system and its computational algorithm that divides the parameter space into a finite set of cells, allowing us to calculate the intersection of the ideals within each cell. This approach enhances comprehension of polynomials and equips researchers and engineers with tools to gain deeper insights into mathematical models involving parametric coefficients. Consequently, it supports thorough examinations essential for tackling complex challenges in science and engineering. The functionality of the proposed algorithm has been implemented in the Maple software environment, which is well-suited for symbolic computation. The paper presents two examples: the first illustrates the intersection of two parametric polynomial ideals, and the second addresses a more complex scenario involving three such ideals. These examples showcase the practical application and effectiveness of the algorithms, highlighting their significance in the field. Finally, the CIS algorithm's performance is demonstrated through comprehensive intersection system computations on several examples.

EXTENDED ABSTRACT

Introduction

The main goal of this paper is to address the insufficiency and weakness of Maple functions in computing the intersection of polynomial ideals with parametric coefficients. This problem can be solved algorithmically by extending the procedure for constant coefficients to parametric cases. One common method to find the intersection of two polynomial ideals is to introduce a new variable t and compute a Gröbner basis w.r.t. an elimination ordering so that a monomial containing t is greater than every monomial that does not contain t . With this monomial ordering, a Gröbner basis of $I \cap J$ consists of those polynomials that do not contain t in the Gröbner basis of the ideal. More precisely, if $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ and $J = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ are two polynomial ideals in the ring $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, then $I \cap J = \langle tf_1, \dots, tf_m, (1-t)g_1, \dots, (1-t)g_n \rangle \cap \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. This article focuses solely on the intersection of parametric polynomial ideals, which, to our knowledge, has not been explored in the literature. The main motivation for studying the intersection of these ideals is to address the limitations of numerical constant-coefficient algorithms when applied to parametric cases. The following example shows that the mentioned traditional approach for computing the intersection may not be used for such ideals.

Example 1. Let us consider $I = \langle -ay + x^2, cy - z, bz^2 + x \rangle$ and $J = \langle bx - y^2, xz - a \rangle$ are two polynomial ideals in $\mathbb{K}[a, b, c][x, y, z]$ where $a, b, c \in \mathbb{C}$ are parameters, and x, y , and z are variables. In the package Polynomial Ideals in Maple, the Intersect function is used to find the intersection of two polynomial ideals I and J . So: $I \cap J = \langle -abxy + ay^3 + bx^3 - x^2y^2, bxz^3 - abz^2 + x^2z - ax, cx^3z - acx^2 - axz^2 + a^2z, axyz - x^3z - a^2y + ax^2, -b^2xz^2 + by^2z^2 - bx^2 + xy^2, cxyz - acy - xz^2 + az, -bcxy + cy^3 + bxz - y^2z, -bcx^3 + cx^2y^2 + abxz - ay^2z, ab^2x^2z^2 - bx^3yz^2 - a^2by^2z + bx^4z + a^2bxy - ax^2y^2, b^2cx^2z - abcy^2 - bxyz^2 + abyz + abx - ay^2, abcx^2 - acxy^2 + ay^2z^2 - x^2yz^2 - a^2bz + x^3z + a^2y - ax^2, -b^2c^2x^2 - b^2cxz^2 + bc^2xy^2 + ab^2cz - bcx^2 + cxy^2 - xyz + ay, -ab^2cx^2 - ab^2xz^2 + abcx^2y + bx^2yz^2 + a^2b^2z - bx^3z - a^2by + axy^2 \rangle$.

By substitution of $a = 0$, $b = 1$ and $c = 1$ in the above $I \cap J$ we have: $I \cap J|_{a=0, b=1, c=1} = \langle -x^2y^2 + x^3, xz^3 + x^2z, zx^3, -zx^3, -zx^3, y^2z^2 + xy^2 - xz^2 - x^2, xyz - xz^2, y^3 - y^2z - xy + xz, x^2y^2 - x^3, -x^3yz^2 + x^4z, -xyz^2 + x^2z, -x^2yz^2 + x^3z, 2xy^2 - xyz - xz^2 - 2x^2, x^2yz^2 - x^3z \rangle$

However, this is wrong for these values since when $I|_{a=0, b=1, c=1} = \langle x^2, z^2 + x, y - z \rangle$, $J|_{a=0, b=1, c=1} = \langle xz, -y^2 + x \rangle$ we obtain: $I|_{a=0, b=1, c=1} \cap J|_{a=0, b=1, c=1} = \langle xz^2, z^2x, yzx, xy^2 - x^2, y^2z + xz, y^3 - xy + 2xz \rangle$.

This example leads to the common question: If $\sigma: \mathbb{K}[a] \rightarrow \mathbb{K}' \supseteq \mathbb{K}$ is a specialization involving parameter assignments, then for which values of parameters $\sigma(I \cap J) = \sigma(I) \cap \sigma(J)$? To achieve this, we propose *comprehensive intersection systems* for two (or more) parametric polynomial ideals and outline an algorithm for computing them. In this procedure, we use Gröbner systems.

Methodology

Applying Gröbner systems to remove Maple functions' Insufficiency offers a practical approach to tackling this problem. We can simplify the original problem by obtaining a

finite set of triangular parametric polynomial systems and parametric conditions. The Gröbner system approach offers a systematic and reliable method for computing the intersection of parametric polynomial ideals across various parameter assignments. As these polynomial ideals rely on certain parameters and variables, employing parametric Gröbner bases proves useful in solving these parametric challenges. Gröbner basis is a useful generator, a key computational tool for studying polynomial ideals, introduced and developed by Buchberger in 1965 in his PhD thesis and named after his advisor, Wolfgang Gröbner. He proposed two criteria to enhance the performance of his algorithm. Lazard described an algorithm for computing Gröbner bases by using linear algebra techniques. Faugère contributed to the development of two renowned algorithms, F4 and F5, for computing Gröbner bases. Given our focus on parametric Gröbner bases, particularly the Gröbner system, we delve into the existing literature on this subject. The concept of Gröbner systems and the initial algorithm for computing them were introduced by Weispfenning in 1992. Over the years, significant progress and numerous results have been achieved in computing Gröbner systems, culminating in Dehghani's 2024 proposal of an efficient algorithm, known as the GES-GVW-CGS algorithm, for their computation.

Results and discussion

Gröbner systems find various applications in Mathematics and other scientific fields.

Specifically, we highlight their role in computing the intersection of parametric polynomial ideals. In this section, we introduce the concept of comprehensive intersection systems for parametric polynomial ideals and describe an algorithm to compute them. Initially, we address this for two parametric polynomial ideals and later extend it to encompass a greater number of ideals.

Definition 2. Let I and J be two parametric polynomial ideals in $S = \mathbb{K}[\mathbf{a}, \mathbf{x}]$. A finite triple set $L = \{(N_i, W_i, L_i)\}_{i=1}^{\ell}$ is called the comprehensive intersection system of $I \cap J$ if for each i and any specialization $\sigma: \mathbb{K}[\mathbf{a}] \rightarrow \mathbb{K}' \supseteq \mathbb{K}$ satisfying the parametric constraint (N_i, W_i) , we have $\sigma(L_i) = \sigma(I) \cap \sigma(J)$.

Based on this definition, we can present the Intersect algorithm to compute a comprehensive intersection system. In doing so, let $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ and $J = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ are two polynomial ideals in $S = \mathbb{K}[\mathbf{a}, \mathbf{x}]$. We consider the ideal

$$H = \langle tf_1, \dots, tf_m, (1-t)g_1, \dots, (1-t)g_n \rangle \subset S[t] = \mathbb{K}[\mathbf{a}, t, \mathbf{x}]$$

and compute a Gröbner system of H w.r.t. the monomial order $\mathbf{a} <_{lex} \mathbf{x} <_{lex} t$ (the lexicographical order in which t is greater than $\mathbf{x}$ and $\mathbf{a}$). The polynomials in this system that do not include the variable t in each branch will constitute a Gröbner basis of $I \cap J$ while adhering to the relevant parametric conditions.

Algorithm 1. INTERSECT

Require: $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ and $J = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ Two polynomial ideals in $S = \mathbb{K}[a, x]$

Ensure: A comprehensive intersection system of $I \cap J$

$$H := \langle tf_1, \dots, tf_m, (1 - t)g_1, \dots, (1 - t)g_n \rangle$$

$$L := \{(N_i, W_i, L_i)\}_{i=1}^{\ell} \text{ a Gröbner system of } H \text{ w.r.t. } a \prec_{lex} x \prec_{lex} t$$

for $(N_i, W_i, L_i) \in L$ **do**

if $L_i \neq \{1\}$ **then**

$$L_i := L_i \cap K[a, x]; \text{ (Eliminate those elements of } L_i \text{ contains the variable } t)$$

end if

end for

Return $\{(N_i, W_i, L_i)\}_{i=1}^{\ell}$

Using our Maple implementation of the INTERSECT algorithm, we obtain the following comprehensive intersection system of $I \cap J$ mentioned in Example 1 as follows:

$$\left\{ \begin{array}{ll} ([b, a], [c], & [cy^3 - y^2z, xz, y^2x]) \\ ([c, b, a], [I], & [y^2z, xz, y^2x]) \\ ([c, a], [b], & [y^2z, xz, bx^2 - xy^2]) \\ ([b^2c^2 + 1, a], [1] & [y^2z^2, y^3z, bc^2y^2 + x]) \\ ([b], [a], & [ay^2, xz^2 - az, xyz - ay, x^2z - az]) \\ ([b], [a, b], & [b^2c^2y^2z^2, cy^3z - y^2z^2, bc^2y^2, bc^2y^2z + xz, b^2c^2y^2z + bcxy - cy^3 + y^2z, \\ & -by^2z^2 + bx^2 - xy^2]) \\ [b^3c^3 - 1], & [a, b, c], [y^2z^2 - abz, y^3z - aby, -abc^2x + ac^2y^2 + xz^3 - az^2, -b^2c^3y^3 - b^3c^2xz + \\ & b^2c^2y^2z + xy, -bc^3y^4 - b^2c^3y^4 - b^2cxz^2 + ab^2cz + bxz^2 - abz + x^2]) \\ ([1, [2a^2b^2c(bc - 1)(b^2c^2 + bc + 1), & [b^2cy^2z^5 - ab^3cz^4 - ay^2z^2 + a^2bz, -b^2y^2z^5 + ab^3z^4 + ay^3z - a^2by, \\ & -b^4c^3y^2z^3 + ab^5c^3z^2 + ab^4c^3x - ab^3c^3y^2 - b^2cy^2z^3 + ab^3cz^2 - abx + ay^2]) \end{array} \right.$$

For instance, if $a = 0, b = 1$ and $c = 1$ then the seventh branch corresponds to these values of parameters (these values satisfy (N_7, W_7)). Therefore, $L_7|_{a=0, b=1, c=1}$ will be the intersection of the ideal $I|_{a=0, b=1, c=1} \cap J|_{a=0, b=1, c=1}$. So,

$$I|_{a=0, b=1, c=1} \cap J|_{a=0, b=1, c=1} = \langle y^2z^2, y^3z - y^2z^2, y^2z + xz, -y^3 + 2y^2z + xy, -y^2z^2 - xy^2 + x^2 \rangle$$

The following theorem extends numeric coefficient methods to parametric coefficients for computing the intersections of more than two parametric polynomial ideals.

Theorem 3. Let $I_1, I_2, \dots, I_r$ be parametric polynomial ideals of $S = \mathbb{K}[a, x]$ and let

$$J = \langle t_1I_1, \dots, t_rI_r, 1 - \sum_{i=1}^r t_i \rangle \subset \mathbb{K}[a_1, \dots, a_m, x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_r] = \mathbb{K}[a, x, t]$$

where $t = t_1, \dots, t_r$ are new variables. Assume that $L := \{(N_i, W_i, L_i)\}_{i=1}^{\ell}$ be a Gröbner system of J w.r.t. $\mathbf{a} <_{lex} \mathbf{x} <_{lex} \mathbf{t}$. Then, the polynomials in this system that do not include the variables t_i together with their parametric pairs will constitute a system of triples (Gröbner system) for $I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_r$.

Conclusion

Gröbner systems offer a powerful tool for analyzing diverse science and engineering applications, akin to intersecting polynomial ideals with parametric coefficients. They provide deeper insights for tackling complex problems by simplifying algebraic expressions and systematically solving polynomial equations with parametric coefficients. This simplification is crucial in various applications, such as robotics and control theory, where streamlined calculations improve efficiency and accuracy. Like computing the intersection of parametric polynomial ideals, Gröbner bases simplify complex algebraic relationships, revealing solutions otherwise hidden.



دستگاه‌های اشتراک جامع و الگوریتم‌های محاسباتی آن‌ها

مهدی دهقانی درمیان*^۱

۱- استادیار، گروه علوم پایه، دانشگاه ملی مهارت، تهران ایران.

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی (کاربردی)	این مقاله اشتراک ایده‌آل‌های چندجمله‌ای را با ضرایب پارامتری با استفاده از دستگاه‌های گربنر معرفی می‌کند. با تکیه بر درک موجود از ایده‌آل‌های چندجمله‌ای با ضرایب عددی، ما یک دستگاه اشتراک و الگوریتم محاسباتی آن را پیشنهاد می‌کنیم که فضای پارامتر را به مجموعه‌ای محدود از سلول‌ها تقسیم می‌کند و به ما امکان می‌دهد اشتراک ایده‌آل‌ها را در هر سلول محاسبه کنیم. این رویکرد درک چندجمله‌ای‌ها را افزایش می‌دهد و محققان و مهندسان را با ابزارهایی مجهز می‌کند تا بینش عمیق‌تری نسبت به مدل‌های ریاضی شامل ضرایب پارامتریک به دست آورند. در نتیجه، از آزمون‌های کامل ضروری برای مقابله با چالش‌های پیچیده در علم و مهندسی پشتیبانی می‌کند. عملکرد الگوریتم پیشنهادی در محیط نرم افزار Maple پیاده سازی شده است که برای محاسبات نمادین مناسب است. این مقاله دو مثال را ارائه می‌کند: اولی اشتراک دو ایده‌آل چندجمله‌ای پارامتری را نشان می‌دهد، و دومی به سناریوی پیچیده‌تری شامل سه ایده‌آل می‌پردازد. این مثال‌ها کاربرد عملی و اثربخشی الگوریتم‌های طراحی شده را نشان می‌دهند و اهمیت آنها را در زمینه محاسبات وابسته به چند پارامتر برجسته می‌کنند. در پایان، عملکرد الگوریتم CIS با محاسبه‌ی دستگاه اشتراک جامع چند مثال، نشان داده شده است.

کلید واژگان:

الگوریتم INTERSECT

الگوریتم CIS

دستگاه‌های گربنر

ایده‌آل‌های چندجمله‌ای پارامتری

دستگاه اشتراک جامع

ترتیب تک‌جمله‌ای

*نویسنده مسئول: مهدی دهقانی

درمیان

پست الکترونیکی:

mdehghanidarmian@tvu.ac.ir

m.dehghanidarmian@ipm.ir



۱. مقدمه:

اشتراک ایده‌آل‌های چندجمله‌ای یک مفهوم اساسی در هندسه جبری و جبر جابجایی است که کاربردهای زیادی در علوم محاسباتی و مهندسی دارد. با توجه به دو ایده‌آل چندجمله‌ای I و J اشتراک آنها به عنوان مجموعه‌ای از همه چندجمله‌ای‌ها تعریف می‌شود که به هر دو ایده‌آل I و J تعلق دارند. هنگام در نظر گرفتن اشتراک دو ایده‌آل چندجمله‌ای I و J یافتن پایه‌ی گربرنر برای اشتراک می‌تواند به ساده کردن محاسبات و تجزیه و تحلیل ویژگی‌های ایده‌آل‌ها کمک کند. یکی از روش‌های رایج برای یافتن پایه‌ی گربرنر برای اشتراک دو ایده‌آل چندجمله‌ای I و J معرفی یک متغیر جدید t ، و استفاده از ترتیب حذفی است به طوری که بلوک اول فقط حاوی t و بلوک دیگر شامل همه متغیرهای دیگر باشد (یعنی یک تک جمله‌ای حاوی t بزرگ‌تر از هر تک جمله‌ای است که حاوی t نیست). با این ترتیب تک جمله‌ای، یک پایه‌ی گربرنر $I \cap J$ از آن چندجمله‌ای‌هایی در پایه‌ی گربرنر ایده‌آل تشکیل می‌شود که حاوی متغیر t نیستند. به طور دقیق تر، اگر I و J دو ایده‌آل چندجمله‌ای به صورت $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle, J = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ در $\mathfrak{R} = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ باشند،

در این صورت اشتراک آن‌ها مطابق زیر محاسبه می‌شود:

$$I \cap J = \langle tf_1, \dots, tf_m, (1-t)g_1, \dots, (1-t)g_n \rangle \cap \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n].$$

این اشتراک با استفاده از پایه‌های گربرنر محاسبه شده است. پایه گربرنر یک مجموعه مولد مفید و ابزار محاسباتی کلیدی برای مطالعه ایده‌آل‌های چندجمله‌ای است که بوخبرگر در سال ۱۹۶۵ معرفی کرد (به پایان نامه دکترای او [۱] مراجعه کنید). روش ذکر شده به ما این امکان را می‌دهد که به طور موثر اشتراک ایده‌آل‌های چندجمله‌ای را محاسبه کرده و خواص آنها را تجزیه و تحلیل کنیم، و بینش‌های ارزشمندی را برای کاربردهای مختلف در هندسه جبری، جبر کامپیوتری و سایر زمینه‌های ریاضیات ارائه کنیم. با استفاده از پایه‌های گربرنر، می‌توانیم درک خود را از ایده‌آل‌های چندجمله‌ای عمیق‌تر کنیم و محاسبات پیشرفته و بررسی‌های نظری را تسهیل کنیم. توسعه پایه‌های گربرنر، مطالعه ایده‌آل‌های چندجمله‌ای و کاربردهای آن‌ها را ارتقا داده و آنها را به عنوان ابزاری حیاتی در تحقیقات جبری مدرن تثبیت کرده است. استفاده از پایه‌های گربرنر، تجزیه و تحلیل عمیق ایده‌آل‌های چندجمله‌ای را امکان‌پذیر می‌سازد، و به طور قابل توجهی به این زمینه کمک می‌کند و درک ما از هندسه جبری و حوزه‌های مرتبط را گسترش می‌دهد. بسیاری از مسائل مهندسی و علمی را می‌توان با مجموعه‌ای مناسب از چندجمله‌ای‌ها با ضرایب پارامتری نشان داد که نیاز به تجزیه و تحلیل مکرر برای مقادیر پارامترهای مختلف دارد. بنابراین، این مقاله صرفاً بر اشتراک ایده‌آل‌های چندجمله‌ای پارامتری تمرکز دارد و تا آنجا که ما می‌دانیم، در متون و مقالات بررسی نشده است. انگیزه اصلی مطالعه اشتراک این ایده‌آل‌ها، نارسایی و ضعف الگوریتم‌های مخصوص ضرایب ثابت عددی برای حالت پارامتری است. مثال زیر نشان می‌دهد که روش سنتی ذکر شده برای محاسبه اشتراک ممکن است برای چنین ایده‌آل‌هایی استفاده نشود و در صورت استفاده پاسخ صحیح برای برخی از مقادیر پارامتری حاصل نشود.

مثال ۱. دو ایده‌آل چندجمله‌ای I و J زیر را در حلقه چندجمله‌ای‌های $\mathfrak{R} = \mathbb{K}[a, b, c][x, y, z]$ به صورت $I = \langle -ay + x^2, cy - z, bz^2 + x \rangle$ و $J = \langle bx - y^2, xz - a \rangle$ در نظر می‌گیریم که در آن a, b, c پارامتر و x, y, z متغیر هستند. در بسته‌ی PolynomialIdeals در نرم افزار تخصصی جبر

محاسباتی Maple، تابع Intersect برای محاسبه‌ی اشتراک دو ایده‌آل چندجمله‌ای I و J استفاده می‌شود. بنابراین، اشتراک I و J برابر است با:

$$I \cap J = \langle -abxy + ay^{\mathfrak{r}} + bx^{\mathfrak{r}} - x^{\mathfrak{r}}y^{\mathfrak{r}}, bxz^{\mathfrak{r}} - abz^{\mathfrak{r}} + x^{\mathfrak{r}}z - ax, cx^{\mathfrak{r}}z - acx^{\mathfrak{r}} - axz^{\mathfrak{r}} + a^{\mathfrak{r}}z, axyz - x^{\mathfrak{r}}z - a^{\mathfrak{r}}y + ax^{\mathfrak{r}}, -b^{\mathfrak{r}}xz^{\mathfrak{r}} + by^{\mathfrak{r}}z^{\mathfrak{r}} - bx^{\mathfrak{r}} + xy^{\mathfrak{r}}, cxyz - acy - xz^{\mathfrak{r}} + az, -bcxy + cy^{\mathfrak{r}} + bxz - y^{\mathfrak{r}}z, -bcx^{\mathfrak{r}} + cx^{\mathfrak{r}}y^{\mathfrak{r}} + abxz - ay^{\mathfrak{r}}z, ab^{\mathfrak{r}}x^{\mathfrak{r}}z^{\mathfrak{r}} - bx^{\mathfrak{r}}yz^{\mathfrak{r}} - a^{\mathfrak{r}}by^{\mathfrak{r}}z + bx^{\mathfrak{r}}z + a^{\mathfrak{r}}bxy - ax^{\mathfrak{r}}y^{\mathfrak{r}}, b^{\mathfrak{r}}cx^{\mathfrak{r}}z - abcy^{\mathfrak{r}} - bxyz^{\mathfrak{r}} + abyz + abx - ay^{\mathfrak{r}}, abcx^{\mathfrak{r}} - acxy^{\mathfrak{r}} + ay^{\mathfrak{r}}z^{\mathfrak{r}} - x^{\mathfrak{r}}yz^{\mathfrak{r}} - a^{\mathfrak{r}}bz + x^{\mathfrak{r}}z + a^{\mathfrak{r}}y - ax^{\mathfrak{r}}, -b^{\mathfrak{r}}c^{\mathfrak{r}}x^{\mathfrak{r}} - b^{\mathfrak{r}}cxz^{\mathfrak{r}} + bc^{\mathfrak{r}}xy^{\mathfrak{r}} + ab^{\mathfrak{r}}cz - bcx^{\mathfrak{r}} + cxy^{\mathfrak{r}} - xyz + ay, -ab^{\mathfrak{r}}cx^{\mathfrak{r}} - ab^{\mathfrak{r}}xz^{\mathfrak{r}} + abcx^{\mathfrak{r}} + bx^{\mathfrak{r}}yz^{\mathfrak{r}} + a^{\mathfrak{r}}b^{\mathfrak{r}}z - bx^{\mathfrak{r}}z - a^{\mathfrak{r}}by + axy^{\mathfrak{r}} \rangle$$

با جایگزینی $a = 0$ ، $b = 1$ و $c = 1$ در ایده‌آل فوق داریم:

$$I \cap J|_{a=0, b=1, c=1} = \langle -x^{\mathfrak{r}}y^{\mathfrak{r}} + x^{\mathfrak{r}}, xz^{\mathfrak{r}} + x^{\mathfrak{r}}z, zx^{\mathfrak{r}}, -zx^{\mathfrak{r}}, y^{\mathfrak{r}}z^{\mathfrak{r}} + xy^{\mathfrak{r}} - xz^{\mathfrak{r}} - x^{\mathfrak{r}}, xyz - xz^{\mathfrak{r}}, y^{\mathfrak{r}} - y^{\mathfrak{r}}z - xy + xz, x^{\mathfrak{r}}y^{\mathfrak{r}} - x^{\mathfrak{r}}, -x^{\mathfrak{r}}yz^{\mathfrak{r}} + x^{\mathfrak{r}}z, -xyz^{\mathfrak{r}} + x^{\mathfrak{r}}z, -x^{\mathfrak{r}}yz^{\mathfrak{r}} + x^{\mathfrak{r}}z, x^{\mathfrak{r}}y^{\mathfrak{r}} - xyz - xz^{\mathfrak{r}} - x^{\mathfrak{r}}, x^{\mathfrak{r}}yz^{\mathfrak{r}} - x^{\mathfrak{r}}z \rangle$$

با این حال، برای این مقادیر حاصل $I|_{a=0, b=1, c=1} \cap J|_{a=0, b=1, c=1}$ اشتباه است زیرا

$$I|_{a=0, b=1, c=1} \cap J|_{a=0, b=1, c=1} = \langle x^{\mathfrak{r}}, z^{\mathfrak{r}} + x, y - z \rangle \cap \langle xz, -y^{\mathfrak{r}} + x \rangle = \langle zx^{\mathfrak{r}}, z^{\mathfrak{r}}x, yzx, xy^{\mathfrak{r}} - x^{\mathfrak{r}}, y^{\mathfrak{r}}z + xz, y^{\mathfrak{r}} - xy + xz \rangle$$

نتیجه‌ی حاصل از این مثال منجر به این سوال می‌شود که برای کدام مقادیر پارامترها، اشتراک دو ایده‌آل پارامتری مقدار داده شده، برابر با مقداردهی اشتراک دو ایده‌آل است؟ به طور دقیق تر، ممکن است فردی علاقه‌مند به تعیین مقادیر پارامترهایی باشد که در آن رابطه تساوی زیر به‌ازای هر هم‌ریختی تخصیص پارامتری $\sigma: \mathbb{K}[a] \rightarrow \mathbb{K}' \supseteq \mathbb{K}$ برقرار باشد:

$$\sigma(I \cap J) = \sigma(I) \cap \sigma(J).$$

برای رسیدن به این هدف، ما دستگاه‌های اشتراک جامع را برای دو (یا تعداد بیشتر) ایده‌آل چندجمله‌ای پارامتری پیشنهاد می‌کنیم و الگوریتمی را برای محاسبه آن طراحی می‌کنیم. در این روش، ما از دستگاه‌های جامع گربنر استفاده می‌کنیم.

۲. دستگاه‌های جامع گربنر

منشأ دستگاه‌های گربنر جامع^۱ (یا به سادگی دستگاه‌های گربنر) و الگوریتم‌های آن‌ها به وایزفنینگ^۲ نسبت داده

^۱ Comprehensive Gröbner systems

^۲ Weispfenning

می‌شود که آن را به عنوان بسط پایه‌های گربنر به چندجمله‌ای با ضرایب پارامتری معرفی کرد [۲]. هنگام کار با یک ایده‌آل چندجمله‌ای با ضرایب پارامتری، یافتن دستگاه گربنر آن به ما کمک می‌کند فضای پارامتر را به تعداد محدودی سلول تقسیم کنیم. هر سلول مربوط به مجموعه‌ای از چندجمله‌ای‌ها است. با وارد کردن مقادیر پارامتر خاص، می‌توانیم سلول دقیق و چندجمله‌ای مرتبط با آن را مشخص کنیم، که با هم پایه‌ی گربنر ایده‌آل برای آن مقادیر پارامتر خاص را تشکیل می‌دهند. به عنوان نقطه شروع، اجازه دهید مفهوم پایه‌های گربنر را دوباره مرور کنیم. برای اطلاعات عمیق تر، لطفاً [۳] را ببینید.

مفهوم پایه‌های گربنر و اولین الگوریتم محاسبه‌ی آن‌ها در رساله‌ی دکترای برونو بوخبرگر تحت راهنمایی ولفگانگ گربنر در سال ۱۹۶۵ معرفی شدند [۱] و محاسبه آن در سال ۱۹۷۹ توسط او بهبود بخشیده شد [۵]. در واقع هدف بوخبرگر یافتن نمایش مناسبی برای فضای خارج قسمتی متناظر با یک ایده‌آل چندجمله‌ای از بعد صفر بود. این نمایش مناسب، زمینه ساز معرفی پایه‌ی استاندارد شد که بوخبرگر بعدها به افتخار استاد راهنمایش آن را پایه‌ی گربنر نامید. الگوریتم بوخبرگر^۱ از پیچیدگی محاسبات بالایی برخوردار بود. وی توانست در سال ۱۹۷۹ با ارائه‌ی دو محک، الگوریتم خود را قدرتمندتر و سریعتر نماید [۱]. دانیل لازارد در سال ۱۹۸۳ در [۶] با استفاده از جبر خطی توانست محاسبه‌ی پایه‌ی گربنر را بهبود بخشد که این خود نقطه‌ی عطفی در زمینه‌ی بهبود محاسبه‌ی پایه‌ی گربنر است. در نهایت فوژر دو الگوریتم مشهور خود یعنی F_4 و F_5 را ارائه کرد [۷، ۸] که الگوریتم F_5 سریع‌ترین الگوریتم محاسبه‌ی پایه‌ی گربنر تاکنون است. در ادامه این پایه‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. برای این منظور در ابتدا حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های چند متغیره را بیان و سپس یک ترتیب تک جمله‌ای را معرفی می‌کنیم.

یک تک جمله‌ای بر حسب متغیرهای $x_1, \dots, x_n$ حاصل ضربی از متغیرهای تواندار $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ است که $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ برداری از اعداد صحیح نامنفی باشد. اگر بردار $\alpha = (0, \dots, 0)$ آنگاه $x^\alpha = 1$ ، همچنین درجه‌ی x^α را با نماد $|\alpha|$ نمایش داده و به صورت $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ تعریف می‌کنیم. فرض کنیم $\mathbb{K}$ یک میدان باشد. هر چندجمله‌ای f بر حسب متغیرهای $x_1, \dots, x_n$ ترکیب خطی تعدادی متناهی از تک جمله‌ای‌ها با ضرایب در $\mathbb{K}$ است که به شکل $f = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha x^\alpha$ می‌باشد و در آن $A \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ زیر مجموعه‌ای متناهی است و $\alpha_\alpha \in \mathbb{K}$ ها ضرایب تک جمله‌ای‌های x^α در f هستند. همچنین، درجه‌ی چندجمله‌ای f را با نماد $\deg(f)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\deg(f) = \max\{|\alpha| \mid a \in A, a_\alpha \neq 0\}$$

مجموعه متشکل از همه‌ی چندجمله‌ای‌ها بر حسب متغیرهای $x_1, \dots, x_n$ با ضرایب در $\mathbb{K}$ به همراه دو عمل جمع و ضرب چندجمله‌ای‌ها تشکیل حلقه‌ای می‌دهند که به حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های چند متغیره مرسوم است و با نماد $\mathfrak{R} = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ نمایش داده می‌شود. بر خلاف حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های یک متغیره که درجه‌ی تک جمله‌ای‌ها نقش تعیین کننده‌ای در مقایسه‌ی آن‌ها دارد، در حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های چند متغیره نیاز به تعریف نوعی ترتیب داریم:

یک ترتیب کلی $<$ روی $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ را یک ترتیب تک جمله‌ای گوییم هرگاه به ازای هر $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$:

^۱ Buchberger's algorithm

۱. اگر $\alpha < \beta$ آنگاه $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$

۲. ترتیب $<$ روی $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ خوش ترتیب باشد.

فرض کنیم $\mathbb{M}(\mathfrak{R})$ مجموعه‌ی تمام تک‌جمله‌ای‌های حلقه‌ی $\mathfrak{R}$ باشد. با استفاده از تناظر یک‌به‌یک زیر یک ترتیب تک‌جمله‌ای روی $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ به یک ترتیب تک‌جمله‌ای روی $\mathfrak{R}$ تبدیل می‌شود:

$$\mathbb{M}(\mathfrak{R}) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^n.$$

$$x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

بنابر این تناظر، به‌ازای دو تک‌جمله‌ای $x^\alpha, x^\beta \in \mathfrak{R}$ اگر $a < \beta$ آنگاه تعریف می‌کنیم $x^\alpha < x^\beta$ از مهم‌ترین ترتیب‌های تک‌جمله‌ای می‌توان به ترتیب الفبایی^۱ اشاره کرد که در آن $\alpha <_{lex} \beta$ هرگاه اولین مؤلفه‌ی ناصفر سمت چپ $\alpha - \beta$ مثبت باشد. فرض کنید $\mathfrak{R} = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ و $<$ یک ترتیب تک‌جمله‌ای روی $\mathfrak{R}$ باشد. چندجمله‌ای $f = a_\alpha x^\alpha + \dots + a_\gamma x^\gamma$ را که در آن $x^\gamma < \dots < x^\alpha$ و $a_\alpha \neq 0$ در نظر می‌گیریم. منظور از تک‌جمله‌ای پیشرو^۲، ضریب پیشرو^۳ و جمله‌ی پیشروی^۴ f نسبت به $<$ به ترتیب a_α, x^γ و $a_\alpha x^\alpha$ است که با نمادهای $LT_{<}(f)$ ، $LC_{<}(f)$ ، $LM_{<}(f)$ نمایش داده می‌شود. همچنین ایده‌آل $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ را ایده‌آلی تک‌جمله‌ای نامیم هرگاه توسط یک مجموعه (متناهی یا نامتناهی) از تک‌جمله‌ای‌ها تولید شود. فرض کنیم $I \subset \mathfrak{R} = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ ایده‌آلی در حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها و $<$ ترتیب تک‌جمله‌ای روی $\mathfrak{R}$ باشد. در این صورت ایده‌آل پیشروی^۵ I را نسبت به $<$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$LT_{<}(I) = \langle LT_{<}(f) \mid f \in I \rangle.$$

همان‌طور که مشخص است $LT_{<}(I)$ ایده‌آلی تک‌جمله‌ای است. در سال ۱۹۱۳ دیکسون ثابت کرد که هر ایده‌آل تک‌جمله‌ای یک مجموعه مولد متناهی دارد (لم دیکسون). پس چندجمله‌ای‌های $g_1, \dots, g_k \in I$ موجودند به‌قسمی که

$$LT_{<}(I) = \langle LT_{<}(g_1), \dots, LT_{<}(g_k) \rangle$$

به مجموعه‌ی ذکر شده یعنی $G = \{g_1, \dots, g_k\} \subset I$ یک پایه‌ی گربنر I نسبت به $<$ می‌گوییم. یکی از مهم‌ترین کاربردهای پایه‌های گربنر حل دستگاه‌های چندجمله‌ای در $\mathfrak{R} = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ می‌باشد. تا کنون پایه‌ی گربنر ایده‌آل I در حلقه‌ی $\mathfrak{R} = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ را نسبت به یک ترتیب تک‌جمله‌ای مطالعه کردیم که در آن ضرایب چندجمله‌ای‌ها در میدان دلخواه $\mathbb{K}$ قرار داشتند. پایه‌های گربنر کاربردهای متعددی در ریاضیات، علوم و مهندسی دارند. از آنجا که بسیاری از مسایل عملی شامل دستگاه‌هایی از معادلات چندجمله‌ای

^۱ Lexicographic order

^۲ Leading monomial

^۳ Leading coefficient

^۴ Leading term

^۵ Leading ideal

حاوی پارامترها است، گسترش پایه‌های گرینر برای مطالعه این دستگاه‌ها ضروری است. این توسیع، در کاربردهای مختلف مانند جبر خطی پارامتری [۱۲، ۱۱، ۱۰، ۹]، معادلات دیفرانسیل [۲۹]، ریاتیک [۱۵، ۱۴، ۱۳]، هندسه جبری [۱۷، ۱۶، ۱۲]، شبکه‌های الکتریکی [۱۸، ۱۴]، و ... نقش مهمی دارد. دستگاه‌های گرینر را می‌توان به‌عنوان بسط پایه‌های گرینر از ایده‌آل‌های چندجمله‌ای با ضرایب عددی به ایده‌آل‌های چندجمله‌ای با ضرایب پارامتری در نظر گرفت. به طور خاص، یک دستگاه گرینر شامل یک مجموعه متناهی از سه‌تایی‌ها است که هر یک شامل قیود پارامتری (یک جفت شرایط پارامتری صفر و ناصفر) و یک مجموعه چندجمله‌ای پارامتری است. ویژگی کلیدی دستگاه گرینر این است که برای هر مقداری (تخصیص عددی پارامترها)، شاخه‌ای وجود دارد که این انتساب را برآورده می‌کند، و مجموعه چندجمله‌ای‌ها پس از جایگزینی پارامترها، پایه‌ی گرینر را برای ایده‌آل پارامتری تخصیص داده شده تشکیل می‌دهد. با تمرکز بر پایه‌های گرینر پارامتری، یا دستگاه‌های گرینر، به طور خلاصه به معرفی آنها می‌پردازیم.

مفهوم پایه‌ی گرینر پارامتری یا دستگاه گرینر جامع (به‌طور خلاصه دستگاه گرینر) برای اولین بار در سال ۱۹۹۲ توسط وایزفنینگ در [۲] معرفی شد. وی در این مقاله اولین الگوریتم محاسبه‌ی دستگاه گرینر را ارائه کرد. در سال ۱۹۹۷ کالک برنز پایایی پایه‌های گرینر تحت تاثیر یک هم‌ریختی خاص به‌نام تخصیص^۱ را مورد مطالعه قرار داد [۱۹] که سال‌ها بعد زمینه‌ی پیدایش الگوریتم‌های سریع‌تر برای محاسبه‌ی این دو مفهوم را فراهم کرد. در سال ۲۰۰۲ مونتس در [۱۴] با استفاده از ایده‌ی طراحی الگوریتم وایزفنینگ [۲]، اولین الگوریتم سریع و کاربردی محاسبه‌ی دستگاه گرینر را ارائه کرد. در سال ۲۰۰۶ سوزوکی و ساتو در [۲۱] با استفاده از نتایج بسیار مهم و مفید کالک برنز توانستند شیوه‌ای جدید برای محاسبه‌ی دستگاه گرینر و پایه‌ی گرینر فراگیر ارائه کنند. در سال ۲۰۱۰ کاپور و همکارانش در [۲۲] با استفاده از الگوریتم ساتو و سوزوکی و همچنین ایده‌های وایزفنینگ سریع‌ترین الگوریتم محاسبه‌ی دستگاه گرینر با نام الگوریتم KSW را طراحی کردند (عنوان KSW^۲ برگرفته شده از ابتدای نام نویسندگان مقاله [۲۲] می‌باشد). الگوریتم KSW از مفهومی به‌عنوان پایه دیکسون کمینه برای حذف شاخه‌های اضافی استفاده می‌کند و یک روش جدید جهت بررسی عضویت رادیکال برای شرایط پارامتری ناصفر انجام می‌دهد. با استفاده از این تکنیک‌ها، الگوریتم KSW شاخه‌های غیر ضروری در الگوریتم سوزوکی-ساتو را حذف می‌کند و در نتیجه شاخه‌های کمتری در خروجی ایجاد می‌شود. در سال‌های اخیر دهقانی محاسبات دستگاه‌های گرینر را با بررسی عمیق‌تر مطالعه ایده‌آل‌های چندجمله‌ای پارامتری بهبود بخشید و الگوریتم‌های کارآمد و موثری در این زمینه طراحی کرد [۲۹، ۲۷، ۲۶، ۲۵، ۲۴، ۲۳]. سرانجام دهقانی در [۲۸] الگوریتم کارآمد خود با نام GESGVWCS را معرفی کرد که با استفاده از تکنیک‌های جبر خطی پارامتری به افزایش فضای پارامتری می‌پردازد (عنوان GESGVWCS برگرفته شده از ترکیب سه الگوریتم GES و GVW و CGS است). در ادامه پس از بیان مقدمات، مفهوم دستگاه گرینر را مختصراً معرفی می‌کنیم.

فرض کنیم $S = \mathbb{K}[a][x]$ حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های پارامتری باشد که در آن $x = x_1, \dots, x_n$ دنباله‌ای از متغیرها و $a = a_1, \dots, a_m$ دنباله‌ای از پارامترها است. هر تک‌جمله‌ای در S به شکل $(\prod a_i)^\delta (\prod x_j)^\gamma$

^۱ Specialization

^۲ Kapur, Sun, Wang

است که در آن $\gamma \in \mathbb{N}^n$ و $\delta \in \mathbb{N}^m$ و برای سادگی به صورت $a^\delta x^\gamma$ نوشته می شود. برای مقایسه ی تک جمله ای های موجود در S نیاز به معرفی یک ترتیب تک جمله ای است: اگر $x <_x$ یک ترتیب تک جمله ای روی متغیرها و $a <_a$ ترتیبی روی پارامترها باشد آنگاه ترتیب تک جمله ای $x_{x,a}$ عبارتست از

$$a^\delta <_a a^\beta \text{ و } x^\gamma = x^\alpha \text{ یا } x^\gamma <_x x^\alpha \text{ اگر } x^\gamma a^\delta <_{x,a} x^\alpha a^\beta$$

که در آن $\alpha \in \mathbb{N}^n$ و $\delta, \beta \in \mathbb{N}^m$

تعریف ۱. فرض کنیم $F, G_i \subset S$ و $(N_i, W_i) \subset \mathbb{K}[a] \times \mathbb{K}[a]$ به ازای $i = 1, \dots, l$. مجموعه ی سه تایی های $\mathcal{G} = \{(N_i, W_i, G_i)\}_{i=1}^l$ یک دستگاه گرینر ایده آل $\langle F \rangle$ روی $\mathbb{K}^m$ نسبت به ترتیب تک جمله ای $x_{x,a}$ نامیده می شود هرگاه $\bigcup_{i=1}^l \mathbb{V}(N_i) \setminus \mathbb{V}(W_i) = \mathbb{A}$ داشته باشیم:

▪ مجموعه ی $\sigma(G_i) \subset \overline{\mathbb{K}}[x]$ یک پایه گرینر $\langle \sigma(F) \rangle$ نسبت به $x <_x$ باشد به قسمی که در آن هم ریختی $\sigma: \mathbb{K}[a] \rightarrow \overline{\mathbb{K}}$ تخصیص دلخواهی است که در (N_i, W_i) صدق می کند.

اگر $\mathbb{A} = \overline{\mathbb{K}}^m$ آنگاه به صورت خلاصه $\mathcal{G}$ را یک دستگاه گرینر $\langle F \rangle$ می نامیم. به هر یک از سه تایی های (N_i, W_i, G_i) در $\mathcal{G}$ یک شاخه ی دستگاه گرینر می گوئیم. همچنین، N_i را مجموعه ی شرایط صفر و W_i را مجموعه ی شرایط ناصفر می نامیم. نهایتاً (N_i, W_i) را زوج سازگار^۱ گوئیم هرگاه $\mathbb{V}(N_i) \setminus \mathbb{V}(W_i) \neq \emptyset$ و در غیر این صورت آن را ناسازگار می نامیم که از دستگاه گرینر قابل حذف می باشد. در ادامه مثالی از دستگاه گرینر یک ایده آل را بیان می کنیم که با اجرای الگوریتم GESGVWCGS در Maple محاسبه شده است.

مثال ۲. فرض کنیم a, b پارامتر و x, y متغیر هستند و مجموعه ی زیر

$$F = \{(a-b)xy + (b-1)y, x^2 + (2-b)y\} \subset \mathbb{K}[a, b][x, y]$$

یک مجموعه ی مولد برای ایده آلی با ضرایب پارامتری باشد. یک دستگاه گرینر $\langle F \rangle$ نسبت به ترتیب تک جمله ای $x <_{lex} y <_{lex} x^2$ عبارتست از:

$$\left\{ \begin{array}{ll} ([b-1, a-1], [], [x^2 + y^2]) \\ ([b-2, a-2], [], [y, x^2]) \\ ([b-a], [b-2, b-1], [by-y, x^2]) \\ ([b-2], [a-2], [axy-2xy+y, x^2, y]). \\ ([], [a-b, b-2], [axy-bxy+by-y, -by+x^2+2y, \\ (2b^2-a^2b+2ab^2-b^3+2a^2-4ab)y + (b^2-2b+1)y]) \end{array} \right.$$

دستگاه گرینر فوق شامل پنج سه تایی است. با انتخاب تصادفی مقادیر $a=3, b=2$ ، شاخه چهارم با این مقادیر پارامتر مطابقت دارد. لذا $\{xy + y, x^2, y\}$ یک پایه ی گرینر برای ایده آل $F|_{a=3, b=2}$ است.

۳. دستگاه های اشتراک جامع

^۱ Consistent pair

در این بخش، مفهوم دستگاه‌های اشتراک جامع را برای ایده‌آل‌های چندجمله‌ای پارامتری معرفی کرده و الگوریتمی برای محاسبه آن ارائه می‌دهیم. در ابتدا، این مورد را برای دو ایده‌آل چندجمله‌ای پارامتری بررسی می‌کنیم و سپس آن را برای دربرگرفتن تعداد بیشتری از ایده‌آل‌ها گسترش می‌دهیم. اشتراک ایده‌آل‌های چندجمله‌ای پارامتری یک مفهوم اساسی در هندسه جبری و جبر جابجایی است و معمولاً شامل مطالعه راه‌حل‌ها یا ریشه‌های مشترک مجموعه‌ای از معادلات چندجمله‌ای می‌شود که به مجموعه‌ای از پارامترها بستگی دارند. در ادامه دستگاه اشتراک دو ایده‌آل چندجمله‌ای با ضرایب پارامتری را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۲. فرض کنید I و J دو ایده‌آل چندجمله‌ای پارامتری در $S = \mathbb{K}[a, x]$ باشند. مجموعه سه‌تایی متناهی $L = \{(N_i, W_i, L_i)\}_{i=1}^{\ell}$ یک دستگاه اشتراک جامع $I \cap J$ نامیده می‌شود هرگاه برای هر i و هر تخصیص $\sigma: \mathbb{K}[a] \rightarrow \mathbb{K}' \supseteq \mathbb{K}$ که در محدودیت پارامتری (N_i, W_i) صدق کند رابطه‌ی $\sigma(L_i) = \sigma(I) \cap \sigma(J)$ برقرار باشد.

بر اساس این تعریف می‌توان الگوریتم INTERSECT را برای محاسبه یک دستگاه اشتراک جامع ارائه نمود. برای انجام این کار، دو ایده‌آل چندجمله‌ای $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ و $J = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ را در حلقه‌ی $S = \mathbb{K}[a, x]$ در نظر می‌گیریم. سپس ایده‌آل زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$H = \langle tf_1, \dots, tf_m, (1-t)g_1, \dots, (1-t)g_n \rangle \subset S[t] = \mathbb{K}[a, x, t]$$

و یک دستگاه گرینر ایده‌آل H را نسبت به ترتیب تک‌جمله‌ای $a <_{lex} x <_{lex} t$ محاسبه می‌کنیم (ترتیب الفبایی که در آن t بزرگتر از x و a است). چندجمله‌ای‌هایی در این دستگاه که متغیر t را در هر شاخه خود ندارند، با توجه به شرایط پارامتری مربوطه، پایه‌ی گرینری تشکیل می‌دهند که مجموعه مولد اشتراک دو ایده‌آل می‌باشند. بر اساس این توضیحات می‌توانیم الگوریتم INTERSECT را برای محاسبه یک دستگاه اشتراک جامع ارائه کنیم.

Algorithm 1. INTERSECT

Input: $I = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ and $J = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$: Polynomial ideals in $S = \mathbb{K}[a, x]$

Output: A comprehensive intersection system of $I \cap J$

$H := \langle tf_1, \dots, tf_m, (1-t)g_1, \dots, (1-t)g_n \rangle$ a GS of H w.r.t. $a <_{lex} x <_{lex} t$

$L := \{(N_i, W_i, L_i)\}_{i=1}^{\ell}$

for $(N_i, W_i, L_i) \in L$ **do**

if $L_i \neq \{1\}$ **then**

$L_i := L_i \cap \mathbb{K}[a, x]$; (Eliminate those elements of L_i contains the variable t)

end if

end for

Return $\{(N_i, W_i, L_i)\}_{i=1}^{\ell}$

قضیه ۱. الگوریتم INTERSECT در تعداد متناهی مرحله به پایان می‌رسد و خروجی آن درست است.

اثبات. پایان پذیری محاسبات دستگاه گربنر خاتمه الگوریتم INTERSECT را تضمین می‌کند. درستی الگوریتم نیز مستقیماً از روش استاندارد توضیح داده شده برای محاسبه‌ی اشتراک دو ایده‌آل در حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها با ضرایب ثابت $R = \mathbb{K}[x]$ نشأت می‌گیرد [۴، صفحه ۱۸۷، قضیه ۱۱]. به طور دقیق‌تر، به‌عنوان مثال سه‌تایی (N_i, W_i, L_i) را از دستگاه گربنر L در مرحله i -ام اجرای حلقه for در نظر می‌گیریم. اگر مجموعه‌ی $\{1\} \neq L_i$ آنگاه چون تمام پارامترهای موجود در $L_i \neq \{1\}$ غیر صفر هستند، می‌توانیم قضیه حذف را اعمال کنیم. بنابراین هر L_i همان مجموعه مولد اشتراک I و J است که در شرایط پارامتری (N_i, W_i) صدق می‌کند.

مثال ساده زیر با استفاده از اجرای Maple الگوریتم INTERSECT که توسط نویسندگان کدنویسی شده، محاسبه شده است.

مثال ۳. ایده‌آل‌های ذکر شده در مثال ۱ را در نظر می‌گیریم.

$$I = \langle -ay + x^2, cy - z, bz^2 + x \rangle \text{ \& } J = \langle bx - y^2, xz - a \rangle$$

آنگاه با استفاده از پیاده‌سازی Maple خود از الگوریتم INTERSECT، دستگاه اشتراک جامع زیر را برای $I \cap J$ به شرح زیر بدست می‌آوریم:

$$\left\{ \begin{array}{ll} ([b, a], [c], & [cy^3 - y^2z, xz, y^2x]) \\ ([c, b, a], [I], & [y^2z, xz, y^2x]) \\ ([c, a], [b], & [y^2z, xz, bx^2 - xy^2]) \\ ([b^2c^2 + 1, a], [1] & [y^2z^2, y^3z, bc^2y^2 + x]) \\ ([b], [a], & [ay^2, xz^2 - az, xyz - ay, x^2z - az]) \\ ([b], [a, b], & [b^3c^2y^2z^2, cy^3z - y^2z^2, bc^2y^2, bc^2y^2z + xz, b^2c^2y^2z + bcxy - cy^3 + y^2z, \\ & -by^2z^2 + bx^2 - xy^2]) \\ [b^3c^3 - 1], & [a, b, c], [y^2z^2 - abz, y^3z - aby, -abc^2x + ac^2y^2 + xz^3 - az^2, -b^2c^3y^3 - b^3c^2xz + \\ & b^2c^2y^2z + xy, -bc^3y^4 - b^2c^3y^4 - b^2cxz^2 + ab^2cz + bxz^2 - abz + x^2]) \\ ([1], [2a^2b^2c(bc-1)(b^2c^2+bc+1), & [b^2cy^2z^5 - ab^3cz^4 - ay^2z^2 + a^2bz, -b^2y^2z^5 + ab^3z^4 + ay^3z - a^2by, \\ & -b^4c^3y^2z^3 + ab^5c^3z^2 + ab^4c^3x - ab^3c^3y^2 - b^2cy^2z^3 + ab^3cz^2 - abx + ay^2]) \end{array} \right.$$

به عنوان مثال، اگر $a = 0, b = c = 1$ آن‌گاه شاخه هفتم دستگاه اشتراک جامع، با این مقادیر پارامترها مطابقت دارد (این مقادیر در (N_7, W_7) صدق می‌کنند، بنابراین مجموعه‌ی $L_7|_{a=0, b=1, c=1}$ برابر ایده‌آل $I|_{a=0, b=1, c=1} \cap J|_{a=0, b=1, c=1}$ خواهد بود. این بدان معناست که برای هر تخصیص σ که مجموعه شرایط (N_7, W_7) را برآورده کند داریم: $\sigma(I) \cap \sigma(J) = \sigma(L_7)$ به‌طور معادل و خلاصه:

$$\begin{aligned} I|_{a=0, b=1, c=1} \cap J|_{a=0, b=1, c=1} \\ = \langle y^2z^2, y^3z - y^2z^2, y^2z + xz, -y^3 + 2y^2z + xy, -y^2z^2 - xy^2 \\ + x^2 \rangle \end{aligned}$$

شایان ذکر است که روش مشابهی وجود دارد که می‌توان برای محاسبه اشتراک بیش از دو ایده‌آل چندجمله‌ای با ضرایب عددی اعمال کرد [۳، گزاره ۱۹، ۶]. قضیه زیر تعمیم این گزاره در مورد ضرایب پارامتری است.

قضیه ۲. فرض کنید $I_1, I_2, \dots, I_r$ ایده‌آل‌های چندجمله‌ای پارامتری در $S = \mathbb{K}[\mathbf{a}, \mathbf{x}]$ باشند. ایده‌آل

$$J = \langle t_1 I_1, \dots, t_r I_r, 1 - \sum_{i=1}^r t_i \rangle \subset \mathbb{K}[a_1, \dots, a_m, x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_r] = \mathbb{K}[\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{t}]$$

را در حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های با ضرایب پارامتری $\mathbb{K}[\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{t}]$ در نظر بگیرید که در آن $t_1, t_2, \dots, t_r$ متغیرهای جدیدی هستند. فرض کنید $L := \{(N_i, W_i, L_i)\}_{i=1}^r$ یک دستگاه گربنر ایده‌آل J نسبت به ترتیب $\mathbf{a} <_{lex} \mathbf{x} <_{lex} \mathbf{t}$ باشد. در این صورت، به‌ازای هر سه‌تایی $(N_i, W_i, L_i) \in L$ ، چندجمله‌ای‌هایی از L_i که شامل متغیرهای جدید $t_1, t_2, \dots, t_r$ نیستند تشکیل یک دستگاه گربنر برای ایده‌آل $I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_r$ متناسب با شرایط صفر و ناصفر (N_i, W_i) می‌دهند.

اثبات. یک سه‌تایی دلخواه $(N_i, W_i, L_i) \in L$ را در نظر می‌گیریم. اگر چندجمله‌ای g تحت شرایط پارامتری (N_i, W_i) متعلق به اشتراک $\sigma(I_1), \sigma(I_2), \dots, \sigma(I_r)$ باشد آن‌گاه می‌توانیم g را به‌صورت زیر نمایش دهیم:

$$g = \sum_{i=1}^r t_i g + \left(1 - \sum_{i=1}^r t_i\right) g$$

که نشان می‌دهد چندجمله‌ای g تحت این شرایط متعلق به $\sigma(J \cap \mathbb{K}[\mathbf{a}, \mathbf{x}])$ است. بنابراین

$$\sigma(I_1) \cap \sigma(I_2) \dots \cap \sigma(I_r) \subseteq \sigma(J \cap \mathbb{K}[\mathbf{a}, \mathbf{x}]).$$

از طرف دیگر، اگر تحت شرایط صفر و ناصفر (N_i, W_i) چندجمله‌ای f در $\sigma(J \cap \mathbb{K}[\mathbf{a}, \mathbf{x}])$ موجود باشد به‌وضوح چندجمله‌ای f متعلق به $\sigma(J)$ نیز است. پس می‌توانیم f را به‌فرم زیر بنویسیم:

$$f = \left(\sum_{i=1}^r \sum_j f_{ij} t_i g_{ij} \right) + \left(1 - \sum_{i=1}^r t_i \right) g$$

که در آن $f_{ij} \in S[\mathbf{t}]$ و $g_{ij} \in \sigma(I_i)$ به‌ازای هر $1 \leq i \leq r$. با انتخاب $t_m = 0$ و $t_n = 1$ که $m \neq n$ نتیجه می‌گیریم $f \in \sigma(I_n)$. حال به‌ازای هر $1 \leq n \leq r$ ، با اختصاص این مقادیر استنباط می‌شود که برای همه سه‌تایی‌ها، رابطه عضویت $f \in \sigma(I_n)$ برقرار است. در نتیجه

$$f \in \sigma(I_1) \cap \sigma(I_2) \dots \cap \sigma(I_r) \Rightarrow \sigma(J \cap \mathbb{K}[\mathbf{a}, \mathbf{x}]) \subseteq \sigma(I_1) \cap \sigma(I_2) \dots \cap \sigma(I_r)$$

با تکیه بر قضیه فوق، می‌توانیم الگوریتم CIS را به‌منظور محاسبه یک دستگاه اشتراک جامع برای بیش از دو ایده‌آل چندجمله‌ای با ضرایب پارامتری طراحی کنیم.

Algorithm 2 CIS (Comprehensive Intersection System)

Require: $I_1, I_2, \dots, I_r$ Some parametric polynomial ideals in $S = \mathbb{K}[\mathbf{a}, \mathbf{x}]$

Ensure: A comprehensive intersection system of $I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_r$

$J := \langle t_1 I_1, \dots, t_r I_r, 1 - \sum_{i=1}^r t_i \rangle \subset \mathbb{K}[\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{t}]$

$L = \{(N_i, W_i, L_i)\}_{i=1}^\ell$ a Gröbner system of J w.r.t. $\mathbf{a} <_{lex} \mathbf{x} <_{lex} \mathbf{t}$

for $(N_i, W_i, L_i) \in L$ **do**

if $L_i \neq \{1\}$ **then**

$L_i := L_i \cap \mathbb{K}[\mathbf{a}, \mathbf{x}]$; (Eliminate those elements of L_i contains the variable t)

end if

end for

Return $(\{(N_i, W_i, L_i)\}_{i=1}^\ell)$

قضیه ۳. الگوریتم CIS پس از تعداد محدودی مرحله خاتمه می‌یابد و به طور دقیق یک دستگاه اشتراک جامع را محاسبه می‌کند.

اثبات. پایان پذیری الگوریتم CIS بر اختتام محاسبات دستگاه گربنر متکی است. درستی الگوریتم نیز مستقیماً از قضیه ۸ استنباط می‌شود.

در ادامه با یک مثال ساده متشکل از سه ایده‌آل چندجمله‌ای، ساختار الگوریتم بالا را شرح می‌دهیم. لازم به ذکر است که کلیه‌ی این محاسبات به‌وسیله اجرای الگوریتم‌ها در نرم‌افزار Maple توسط نویسنده انجام شده است.

مثال ۴. سه ایده‌آل چندجمله‌ای زیر با ضرایب پارامتری را در حلقه‌ی $S = \mathbb{K}[a, b, c][x, y, z]$ در نظر می‌گیریم:

$$I_1 = \langle by^2 - x^3 \rangle, I_2 = \langle y^2 - a - y, -cz + z^2 - 1 \rangle,$$

$$I_3 = \langle cx - y^2, -cx - z^2 + 1, x^2 - x \rangle$$

هدف ما محاسبه یک دستگاه اشتراک جامع برای این سه ایده‌آل است. در شروع فرایند، طبق روند الگوریتم ابتدا ایده‌آل J را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$J = \langle by^2 t_1 - x^3 t_1, y^2 t_2 - a t_2 - y t_2, -c z t_2 + z^2 t_2 - t_2, c x t_3 - y^2 t_3, -c x t_3 - z^2 t_3 + t_3, x^2 t_3 - x t_3, 1 - t_1 - t_2 - t_3 \rangle$$

دستگاه گربنر ایده‌آل J نسبت به ترتیب تک‌جمله‌ای $\mathbf{a} <_{lex} \mathbf{x} <_{lex} \mathbf{t}$ دارای شش شاخه است که با حذف چندجمله‌ای‌های شامل متغیر $\mathbf{t} = t_1, \dots, t_r$ از پایه‌های گربنر موجود در این سه‌تایی‌ها، دستگاه اشتراک جامع زیر محاسبه می‌شود:

Parametric Constraints	Comprehensive Intersection System (CIS)
$N_1 = [bc - 1],$ $W_1 = [a, c]$	$[-by^2z^2 - cx^3z + x^3z^2 + by^2 - x^3 + y^2z, -by^4 + x^3y^2 + aby^2 - ax^3 + by^3 - x^3y]$
$N_2 = [c],$ $W_2 = [a]$	$[-by^2z^2 + x^3z^2 + by^2 - x^3, -bxy^4 + x^4y^2 + abxy^2 - ax^4 + bxy^3 + by^4 - x^4y - x^3y^2 - aby^2 + ax^3 - by^3 + x^3y, -by^6 + x^3y^4 + aby^4 - ax^3y^2 + by^5 - x^3y^3]$
$N_3 = [bc - 1, a],$ $W_3 = [c]$	$[-by^2z^2 - cx^3z + x^3z^2 + by^2 - x^3 + y^2z, -by^4 + x^3y^2 + aby^2 - ax^3 + by^3 - x^3y]$
$N_4 = [c, a],$ $W_4 = []$	$[-by^2z^2 + x^3z^2 + by^2 - x^3, aby^4 - ax^3y^2 - by^5 + x^3y^3 + by^4 - x^3y^2, -bxy^4 + x^4y^2 + abxy^2 - ax^4 + bxy^3 + by^4 - x^4y - x^3y^2 - aby^2 + ax^3 - by^3 + x^3y]$
$N_5 = [a],$ $W_5 = [c, bc - 1]$	$[bcy^2z^3 - by^2z^4 - cx^3z^3 + x^3z^4 + bc^2y^2z - bcy^2z^2 - c^2x^3z + cx^3z^2 - bcy^2z + 2by^2z^2 + cx^3z - 2x^3z^2 + bcy^2 - cx^3 - by^2 + x^3, abcy^2z^2 - aby^2z^3 - acx^3z^2 + ax^3z^3 - bc^2y^4 - bc^2y^2z^2 + bcy^3z^2 + bcy^2z^3 - by^3z^3 + c^2x^3y^2 + c^2x^3z^2 - cx^3yz^2 - cx^3z^3 + x^3yz^3 + abc^2y^2 - abcy^2z + aby^2z^2 - ac^2x^3 + acx^3z - ax^3z^2 + bc^2y^3 + bc^2y^2z - bcy^3z^2 + by^3z^2 - c^2x^3y - c^2x^3z + cx^3yz + cx^3z^2 - x^3yz^2 + aby^2z - ax^3z - bcy^2z + by^3z + cx^3z - x^3yz - aby^2 + ax^3 + bcy^2 - by^3 - cx^3 + x^3y, bcy^2z - bxy^2z^2 - cx^4z + x^4z^2 - bcy^2z + by^2z^2 + cx^3z - x^3z^2 + bxy^2 - x^4 - by^2 + x^3]$
$N_6 = [],$ $W_6 = [a^2c^2(bc - 1)]$	$[bcy^2z^3 - by^2z^4 - cx^3z^3 + x^3z^4 + bc^2y^2z - bcy^2z^2 - c^2x^3z + cx^3z^2 - bcy^2z + 2by^2z^2 + cx^3z - 2x^3z^2 + bcy^2 - cx^3 - by^2 + x^3, abcy^2z^2 - aby^2z^3 - acx^3z^2 + ax^3z^3 - bc^2y^4 - bc^2y^2z^2 + bcy^3z^2 + bcy^2z^3 - by^3z^3 + c^2x^3y^2 + c^2x^3z^2 - cx^3yz^2 - cx^3z^3 + x^3yz^3 + abc^2y^2 - abcy^2z + aby^2z^2 - ac^2x^3 + acx^3z - ax^3z^2 + bc^2y^3 + bc^2y^2z - bcy^3z^2 + by^3z^2 - c^2x^3y - c^2x^3z + cx^3yz + cx^3z^2 - x^3yz^2 + aby^2z - ax^3z - bcy^2z + by^3z + cx^3z - x^3yz - aby^2 + ax^3 + bcy^2 - by^3 - cx^3 + x^3y, bcy^2z - bxy^2z^2 - cx^4z + x^4z^2 - bcy^2z + by^2z^2 + cx^3z - x^3z^2 + bxy^2 - x^4 - by^2 + x^3]$

۴. آنالیز عملکرد الگوریتم‌ها

در این بخش، عملکرد الگوریتم CIS که در Maple پیاده‌سازی شده است، با مثال‌هایی که دستگاه اشتراک جامع را برای دسته‌ای از ایده‌آل‌های چندجمله‌ای پارامتری محاسبه می‌کنند، بیشتر نشان داده می‌شود. این مثال‌ها به دلیل اندازه‌ها و پیچیدگی‌های مختلفشان در حلقه $S = \mathbb{K}[a, b, c, d][x, y, z, u, v]$ انتخاب شده‌اند، دستگاه اشتراک جامع را برای هر ایده‌آل با توجه به ترتیب $X <_{lex} Y <_{lex} Z <_{lex} u <_{lex} v$ محاسبه می‌کنند. شایان ذکر است که منظور از $<_{lex}$ ترتیب الفبایی می‌باشد. در این سیزده لیست که هر کدام حاوی دو یا سه یا چهار ایده‌آل چندجمله‌ای هستند، a, b, c, d دنباله پارامترها و X, Y, Z, u, v دنباله متغیرها هستند.

- **Ex1:** $[[z*x^2-(a-1)*y*x, x*y], [-c*y+x^2], [-x*z+b, -x^3+d*y, x^2-2]]$
- **Ex2:** $[[x*(x-a), c*y+2, x*y-b], [(x-1)*y^2-1, d*x*y-c]]$
- **Ex3:** $[[c*z^3+1, x^2*y-b*z], [(b-1)*x^2-z, (d-1)*u-c*x]]$
- **Ex4:** $[[a*y*z, y*z+c, x*y^2-1], [d*z^2-2, c*x-u, x-y-z]]$
- **Ex5:** $[[b*y^2-x^3], [y^2-a-y, -1-c*z+z^2], [c*x-y^2, -c*x-z^2+1, x^2-x]]$
- **Ex6:** $[[a-b]*x, b*y^2-x], [y^2*(-a+2), b*x^2-z], [c*z-y^2, -z^2+x]]$
- **Ex7:** $[[b*y^2-x^3], [y^2-a-y, z^2-c-z], [c*x-y^2, -z^2+x, x^2-x]]$

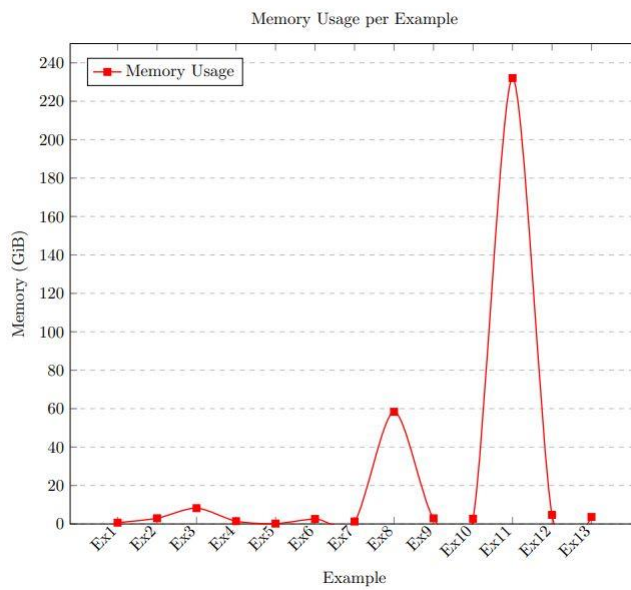
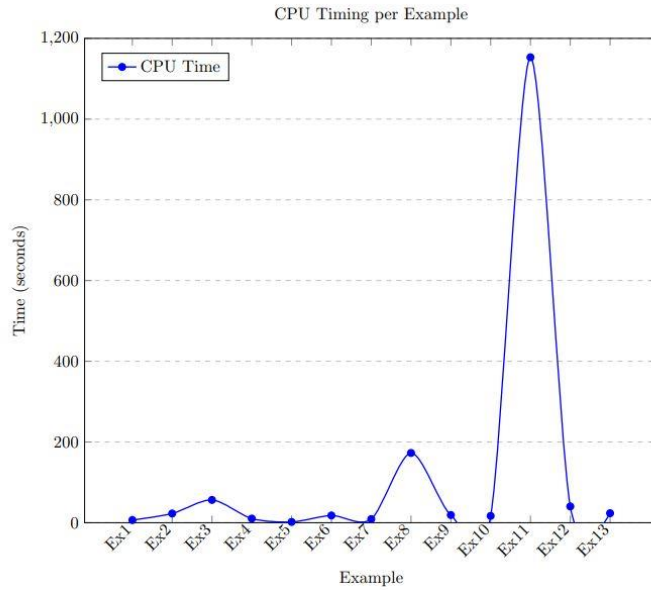
- **Ex8:** $[[b*x^2-d*y], [b*z+x*y-a], [c*x-y, -x^2-y+1]]$
- **Ex9:** $[[x*y^3-b*y^2, x*z], [a*y^2-z^2, z-1], [-x*z^2+c, -z^2+x, y^2-a]]$
- **Ex10:** $[[x*y*z-b*y-x*z, -x*z+1], [a*y*z-z^2, x*y*z], [c*x*z^2-z^2-x, y^2]]$
- **Ex11:** $[-a*d*y+x^2, c*y-z, b*z^2+x], [b*x-y^2, x*z-a], [d-u]]$
- **Ex12:** $[-a*u+1], [y*z+c, y^2-u], [z^2-2*d, c*x-u, b*x-y]]$
- **Ex13:** $[-d*u+v], [c*v+y*z, b-y], [c*u*y^2-u*y], [u*z^2-2*y, a*x-v^2]]$

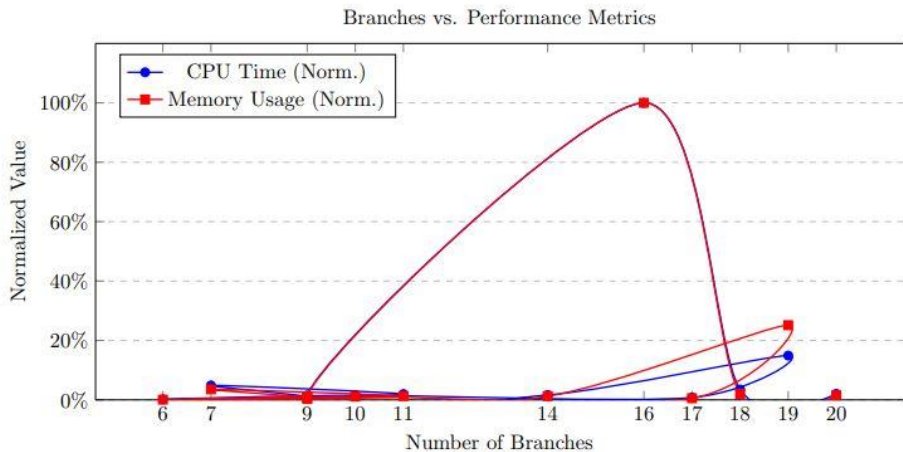
جدول ۱: معیارهای عملکرد الگوریتم ۲

Example	Timing (seconds)	Memory (GiB)	Branches
Ex۱	۶,۴۹	۰,۶۷	۹
Ex۲	۲۲,۸۱	۲,۹۶	۱۱
Ex۳	۵۶,۴۶	۸,۲۱	۷
Ex۴	۱۰,۲۹	۱,۴۴	۹
Ex۵	۱,۸۹	۰,۱۸	۶
Ex۶	۱۷,۹۴	۲,۵۸	۱۰
Ex۷	۹,۰۲	۱,۲۵	۱۷
Ex۸	۱۷۲,۸	۵۸,۳۵	۱۹
Ex۹	۱۹,۰۸	۲,۹۲	۱۴
Ex۱۰	۱۶,۹۰	۲,۶۹	۹
Ex۱۱	۱۱۵۳,۲	۲۳۲,۰۶	۱۶
Ex۱۲	۴۰,۳۷	۴,۷۲	۱۸
Ex۱۳	۲۳,۵۶	۳,۶۱	۲۰

نتایج اجرای الگوریتم بر روی این سیزده ایده آل در جدول بالا نشان داده شده است. ستون‌های جدول نشان دهنده موارد زیر هستند:

- زمان‌بندی: زمان محاسبات برحسب ثانیه برای محاسبه
 - حافظه (گیگابایت): حداکثر استفاده از حافظه در طول محاسبه
 - شاخه‌ها: تعداد شاخه‌ها در دستگاه جامع اشتراک محاسبه شده
- در ادامه با توجه به داده‌های جدول ۱، سه نمودار زمان محاسبات، حافظه محاسبات و ترکیب آنها را ارائه می‌دهیم.





شایان ذکر است برای یک سیستم از چندجمله‌ایهای n متغیره از درجه حداکثر d ، پیچیدگی محاسبات در بدترین حالت می‌تواند $d^{20(n)}$ باشد.

۵. مساله سینماتیک معکوس در ربات رومین

در این بخش یکی از کاربردهای مهم ایده‌آل‌های چندجمله‌ای پارامتری و الگوریتم‌های محاسبه دستگاه گرنر را مرور می‌کنیم که از مرجع [۱۵] استخراج شده است. مسئله سینماتیک معکوس^۱ در رباتیک یک فرآیند ریاضی متشکل از معادلات و روابط سینماتیکی است که در تعیین حرکت ربات، محاسبه موقعیت‌های مفصلی و تعیین طول بازوها برای رسیدن به موقعیت مطلوب و مورد نظر در صفحه یا فضا مطرح می‌شود. برخلاف سینماتیک مستقیم^۲ که اگر مفاصل در یک موقعیت خاص تنظیم شوند، نقطه دسترسی ربات یک پاسخ خواهد داشت، سینماتیک معکوس، اغلب چندین راه حل مختلف و رویکرد متعدد برای دسترسی به نقطه مشخص ارایه می‌کند. هدف از حل مساله سینماتیک معکوس تعیین طول بازوها و مقادیر زاویه‌های اتصالات و مفاصل ربات برای قرار دادن دست ربات در یک نقطه و جهت معین از فضای دسترسی ربات می‌باشد. ربات رومین یک ربات با درجه

^۱ Inverse kinematics problem

^۲ Forward kinematics

آزادی سه چرخشی سه بعدی است که دارای سه بازو است که همگی دارای اتصالات چرخشی مسطح و پایه چرخشی هستند. زاویه θ_1 حول محوری عمود بر سطح زمین می‌چرخد. همچنین زاویه θ_2 (به ترتیب، زاویه θ_3) زاویه اندازه‌گیری شده از صفحه افقی Q1 (به ترتیب، از صفحه Q2) تا بازوی دوم (به ترتیب، تا بازوی سوم) است. برای یک نقطه $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ بعنوان مختصات دست ربات و با استفاده از ماتریس‌های دوران حول محورهای x, y, z دستگاه متشکل از ۶ معادله زیر حاصل می‌شود که در آن $c_i = \cos \theta_i$ و $s_i = \sin \theta_i$ از طرفی با توجه به مجموعه مولد بالا چون عبارت

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -s_1(l_2c_2 + l_3c_3) = a \\ c_1(l_2c_2 + l_3c_3) = b \\ l_2s_2 + l_3s_3 = c \\ s_1^2 + c_1^2 = 1 \\ s_2^2 + c_2^2 = 1 \\ s_3^2 + c_3^2 = 1 \end{cases}$$

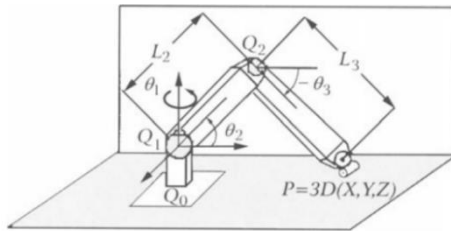
در هر دو معادله اول دستگاه فوق وجود دارد برای کم

شدن پیچیدگی محاسبات متغیر جدید d را برابر $l_2c_2 + l_3c_3$ در نظر می‌گیریم پس دستگاهی متشکل از ۷ معادله داریم:

حال اگر بجای $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ از سه متغیر $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ به‌عنوان مختصات دست ربات استفاده کنیم مجموعه مولدی با هفت چندجمله‌ای زیر تشکیل می‌شود:

$$\begin{cases} -s_1d = a \\ c_1d = b \\ l_2c_2 + l_3c_3 = d \\ l_2s_2 + l_3s_3 = c \\ s_1^2 + c_1^2 = 1 \\ s_2^2 + c_2^2 = 1 \\ s_3^2 + c_3^2 = 1 \end{cases}$$

$$F = \{s_1^2 + c_1^2 - 1, s_2^2 + c_2^2 - 1, s_3^2 + c_3^2 - 1, x + ds_1, y - dc_1, l_2c_2 + l_3c_3 - d, l_2s_2 + l_3s_3 - z\}$$



شکل ۱: مدل‌سازی ربات ۳ بعدی رومین

اکنون با کمک الگوریتم GES-GVW-CGS که در نرم افزار Maple اجرا شده است [۲۸] دستگاه گرینر F را محاسبه کرده ایم که در جدول ۲ آمده است.

Parametric Constraints	Gröbner Bases
$[d, z, y, x, l_3, l_2], []$	$[c_1^2 + s_1^2 - 1, c_2^2 + s_2^2 - 1, c_3^2 + s_3^2 - 1]$
$[d, y, x, l_3, l_2], [z]$	$[c_1^2 + s_1^2 - 1, c_2^2 + s_2^2 - 1, -z]$
$[d, y, x, l_3, l_2 - z], [z]$	$[c_1^2 + s_1^2 - 1, c_2^2 + s_2^2 - 1, s_2 z - z, c_2 z, c_3^2 + s_3^2 - 1]$
$[d, y, x, l_3, l_2 + z], [z]$	$[c_1^2 + s_1^2 - 1, c_2^2 + s_2^2 - 1, -s_2 z - z, -c_2 z, c_3^2 + s_3^2 - 1]$
$[d, y, x, l_3], [l_2, l_2 - z, l_2 + z]$	$[c_1^2 + s_1^2 - 1, c_2^2 + s_2^2 - 1, l_2 s_2 - z, l_2 c_2, l_2^2 - z^2]$
$[d, y, x, l_3 - z, l_2], [z]$	$[c_1^2 + s_1^2 - 1, c_2^2 + s_2^2 - 1, s_3 z - z, z c_3]$
$[d, y, x, l_3 + z, l_2], [z]$	$[c_1^2 + s_1^2 - 1, c_2^2 + s_2^2 - 1, -s_3 z - z, -z c_3]$
$[d, y, x, l_2], [l_3, l_3 - z, l_3 + z]$	$[c_1^2 + s_1^2 - 1, c_2^2 + s_2^2 - 1, l_3 s_3 - z, l_3 c_3, -l_3^2 + z^2]$
$[d, z, y, x, l_2 - l_3], [l_3]$	$[c_1^2 + s_1^2 - 1, c_2^2 + s_2^2 - 1, l_3 s_2 + l_3 s_3, c_2 l_3 + c_3 l_3]$
$[d, z, y, x, l_2 + l_3], [l_3]$	$[c_1^2 + s_1^2 - 1, c_2^2 + s_2^2 - 1, -l_3 s_2 + l_3 s_3, -c_2 l_3 + c_3 l_3]$
$[d, z, y, x], [l_2, l_2 - l_3, l_2 + l_3]$	$[c_1^2 + s_1^2 - 1, c_2^2 + s_2^2 - 1, l_2 s_2 + l_3 s_3, c_2 l_2 + c_3 l_3, l_2^2 - l_3^2]$
$[d, y, x], [l_2, l_3, z]$	$[c_1^2 + s_1^2 - 1, c_2^2 + s_2^2 - 1, l_2 s_2 + l_3 s_3 - z, c_2 l_2 + c_3 l_3, -2l_2 s_2 z + l_2^2 - l_3^2 + z^2]$
$[z, -d^2 + x^2 + y^2, l_3, l_2], [d]$	$[ds_1 + x, c_1 d - y, c_2^2 + s_2^2 - 1, -d]$
$[-d^2 + x^2 + y^2, l_3, l_2], [d, z]$	$[ds_1 + x, c_1 d - y, c_2^2 + s_2^2 - 1, -z]$
$[x^2 + y^2 - d^2, l_3, l_2^2 - d^2 - z^2], [d, l_2]$	$[ds_1 + x, c_1 d - y, c_2^2 + s_2^2 - 1, l_2 s_2 - z, c_2 l_2 - d, c_3^2 + s_3^2 - 1]$
$[-d^2 + x^2 + y^2, l_3], [d, l_2, -d^2 + l_2^2 - z^2]$	$[ds_1 + x, c_1 d - y, c_2^2 + s_2^2 - 1, l_2 s_2 - z, c_2 l_2 - d, -d^2 + l_2^2 - z^2]$
$[x^2 + y^2 - d^2, l_3^2 - d^2 - z^2, l_2], [d, l_3]$	$[ds_1 + x, c_1 d - y, c_2^2 + s_2^2 - 1, l_3 s_3 - z, c_3 l_3 - d]$
$[-d^2 + x^2 + y^2, l_2], [d, l_3, -d^2 + l_3^2 - z^2]$	$[ds_1 + x, c_1 d - y, c_2^2 + s_2^2 - 1, l_3 s_3 - z, c_3 l_3 - d, d^2 - l_3^2 + z^2]$
$[d^2 + z^2, x^2 + y^2 - d^2, l_2 - l_3], [d, l_3, z]$	$[ds_1 + x, c_1 d - y, c_2^2 + s_2^2 - 1, l_3 s_2 + l_3 s_3 - z, c_2 l_3 + c_3 l_3 - d, -2c_2 d l_3 - 2l_3 s_2 z, -4d^2 l_3^2]$
$[d^2 + z^2, x^2 + y^2 - d^2, l_2 + l_3], [d, l_3, z]$	$[ds_1 + x, c_1 d - y, c_2^2 + s_2^2 - 1, -l_3 s_2 + l_3 s_3 - z, -c_2 l_3 + c_3 l_3 - d, 2c_2 d l_3 + 2l_3 s_2 z, -4d^2 l_3^2]$
$[d^2 + z^2, -d^2 + x^2 + y^2], [d, l_2, l_3, z, l_2 - l_3, l_2 + l_3]$	$[ds_1 + x, c_1 d - y, c_2^2 + s_2^2 - 1, l_2 s_2 + l_3 s_3 - z, c_2 l_2 + c_3 l_3 - d, -2c_2 d l_2 - 2l_2 s_2 z + l_2^2 - l_3^2, -4l_2^3 s_2 z + 4l_2 l_3^2 s_2 z - 4d^2 l_2^2 + l_2^4 - 2l_2^2 l_3^2 + l_3^4]$
$[x^2 + y^2 - d^2], [d, l_2, l_3, d^2 + z^2]$	$[ds_1 + x, c_1 d - y, c_2^2 + s_2^2 - 1, l_2 s_2 + l_3 s_3 - z, c_2 l_2 + l_3 - d, -2c_2 d l_2 - 2l_2 s_2 z + d^2 + l_2^2 - l_3^2 + z^2, 4d^2 l_2^3 s_2^2 + 4l_2^3 s_2^2 z^2 - 4d^2 l_2 s_2 z - 4l_2^3 s_2 z + 4l_2 l_3^2 s_2 z - 4l_2 s_2 z^3 + d^4 - 2d^2 l_2^2 - 2d^2 l_3^2 + 2d^2 z^2 + l_2^4 - 2l_2^2 l_3^2 + 2l_3^2 z^2 + l_3^4 - 2l_3^2 z^2 + z^4]$
$[z, l_3, l_2], [d, -d^2 + x^2 + y^2]$	$[ds_1 + x, c_1 d - y, -d^2 + x^2 + y^2]$
$[l_3, l_2], [d, z, -d^2 + x^2 + y^2]$	$[ds_1 + x, c_1 d - y, -d^2 + x^2 + y^2]$
$[l_3], [d, l_2, -d^2 + x^2 + y^2]$	$[ds_1 + x, c_1 d - y, -d^2 + x^2 + y^2]$
$[], [d, l_3, -d^2 + x^2 + y^2]$	$[ds_1 + x, c_1 d - y, -d^2 + x^2 + y^2]$
$[d, z, x, l_3, l_2], [y]$	$[1]$
$[d, x, l_3, l_2], [y, z]$	$[1]$
$[d, x, l_3], [l_2, y]$	$[1]$
$[d, x], [l_3, y]$	$[1]$
$[d, z, y, l_3, l_2], [x]$	$[1]$
$[d, y, l_3, l_2], [x, z]$	$[1]$
$[d, y, l_3], [l_2, x]$	$[1]$
$[d, y], [l_3, x]$	$[1]$
$[d, z, l_3, l_2], [x, y]$	$[1]$
$[d, l_3, l_2], [x, y, z]$	$[1]$
$[d, l_3], [l_2, x, y]$	$[1]$
$[d], [l_3, x, y]$	$[1]$

این دستگاه نسبت به ترتیب تک جمله ای $C_3 <_{lex} S_3 <_{lex} C_2 <_{lex} S_2 <_{lex} C_1 <_{lex} S_1$ روی متغیرها و ترتیب تک جمله ای $l_1 <_{lex} l_2 <_{lex} y <_{lex} x <_{lex} z <_{lex} d$ است و دارای ۳۸ سه تایی (شاخه) است که در مدت ۵,۶۳ ثانیه محاسبه شده و حافظه مورد نیاز برای این محاسبات ۱,۹۲ گیگابایت می باشد. اکنون به کمک این جدول و به صورت خودکار می توانیم مسئله سینماتیک معکوس را تحلیل کنیم. برای مثال سطر ۲۲ جدول بالا (ردیف مشخص شده) را در نظر می گیریم که در آن $x^2 + y^2 - d^2 = 0$ و $d \neq 0, l_2 \neq 0, l_3 \neq 0, d^2 + z^2 \neq 0$ آنگاه لیست زیر پایه گرینر F نسبت به شرایط پارامتری ذکر شده است که آنرا G_{22} می نامیم.

$$[ds_1 + x, c_1d - y, c_2^2 + s_2^2 - 1, l_2s_2 + l_3s_3 - z, c_2l_2 + l_3 - d, -2c_2dl_2 - 2l_2s_2z + d^2 + l_2^2 - l_3^2 + z^2, 4d^2l_2^2s_2^2 + 4l_2^2s_2^2z^2 - 4d^2l_2s_2z - 4l_2^3s_2z + 4l_2l_3^2s_2z - 4l_2s_2z^3 + d^4 - 2d^2l_2^2 - 2d^2l_3^2 + 2d^2z^2 + l_2^4 - 2l_2^2l_3^2 + 2l_2^2z^2 + l_3^4 - 2l_3^2z^2 + z^4]$$

حال با توجه به مجموعه شرایط صفر و ناصفر N_{22}, W_{22} به عنوان مثال قرار می دهیم:

$$l_2 = 3.5, \quad l_3 = 5.5, \quad (x, y, z) = (3, 4, 6) \in \mathbb{R}^3$$

پس از جایگذاری این مقادیر در پایه گرینر G_{22} داریم:

$$[5s_1 + 3, 5c_1 - 4, c_2^2 + s_2^2 - 1, 5.5s_3 + 3.5s_2 - 6, 5.5c_3 + 3.5c_2 - 5, 43 - 35c_2 - 42s_2, 624 - 3612s_2 + 2989s_2^2]$$

$$\begin{cases} 5s_1 + 3 & = 0 \\ 5c_1 - 4 & = 0 \\ c_2^2 + s_2^2 - 1 & = 0 \\ 5.5s_3 + 3.5s_2 - 6 & = 0 \\ 5.5c_3 + 3.5c_2 - 5 & = 0 \\ -35c_2 - 42s_2 + 43 & = 0 \\ 2989s_2^2 - 3612s_2 + 624 & = 0 \end{cases}$$

که منجر به تشکیل دستگاه هفت معادله ای زیر می شود:

از حل این دستگاه دو دسته مجموعه جواب حاصل می شود:

$$\begin{cases} s_3 = 0.9580021314 & c_3 = 0.2867610787 \\ s_2 = 0.2088537935 & c_2 = 0.9779468763 \\ s_1 = -0.6, & c_1 = 0.8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_3 = 0.4548145601 & c_3 = 0.8905861642 \\ s_2 = 0.9995771198 & c_2 = 0.02907888479 \\ s_1 = -0.6, & c_1 = 0.8 \end{cases}$$

در نتیجه معادل این دو مجموعه جواب، دو حالت زیر برای زاویه بین بازوها به دست می آید:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_3 = 73.33585444^\circ \quad \text{and} \quad \theta_2 = 12.05519009^\circ \quad \text{and} \quad \theta_1 = -36.86989764^\circ \\ \text{or} \\ \theta_3 = 27.05300333^\circ \quad \text{and} \quad \theta_2 = 88.33366771^\circ \quad \text{and} \quad \theta_1 = -36.86989764^\circ \end{array} \right.$$

در ۱۲ ردیف پایانی جدول ۲، حالت‌های پارامتری را می‌بینیم که دارای پایه گربنر [۶] هستند و در این حالت‌ها دستگاه چندجمله‌ای مربوط به مدل جبری ربات رومین فاقد جواب است. در واقع به کمک دستگاه گربنر تمام حالات تکینگی ربات رومین بطور اتومات محاسبه شده‌اند که در جدول ۳ نمایش می‌دهیم:

Null Sets	Not Null Sets	Gröbner Bases
$[d, z, x, l_3, l_2]$	$[y]$	$[1]$
$[d, x, l_3, l_2]$	$[y, z]$	$[1]$
$[d, x, l_3]$	$[l_2, y]$	$[1]$
$[d, x]$	$[l_3, y]$	$[1]$
$[d, z, y, l_3, l_2]$	$[x]$	$[1]$
$[d, y, l_3, l_2]$	$[x, z]$	$[1]$
$[d, y, l_3]$	$[l_2, x]$	$[1]$
$[d, y]$	$[l_3, x]$	$[1]$
$[d, z, l_3, l_2]$	$[x, y]$	$[1]$
$[d, l_3, l_2]$	$[x, y, z]$	$[1]$
$[d, l_3]$	$[l_2, x, y]$	$[1]$
$[d]$	$[l_3, x, y]$	$[1]$

۶. نتیجه گیری

بسیاری از چالش‌های کاربردی جذاب در زمینه های علوم و مهندسی را می‌توان با استفاده از دستگاه‌های گربنر به طور کامل و موثر تجزیه و تحلیل کرد. این رویکردها تا حدودی مشابه اشتراک ایده‌آل‌های چندجمله‌ای با ضرایب پارامتری هستند. با استفاده از دستگاه‌های گربنر، محققان و مهندسان می‌توانند بینش عمیق‌تری کسب کنند و بررسی‌های دقیق‌تری را انجام دهند که برای رسیدگی به مسایل پیچیده در رشته‌های مربوطه خود ضروری است. علاوه بر این، تطبیق پذیری و کاربرد دستگاه‌های گربنر فراتر از ریشه‌یابی چندجمله‌ای‌ها با ضرایب پارامتری است. همچنین، این مفهوم نقش محوری در ساده سازی عبارات جبری و حل دستگاه‌های معادلات چندجمله‌ای ایفا می‌کند. این ساده سازی در کاربردهای مختلف مانند رباتیک، تئوری کنترل و طراحی هندسی به کمک کامپیوتر، که در آن توانایی ساده کردن محاسبات می‌تواند کارایی و دقت را به طور قابل توجهی افزایش دهد، مفید است. از طریق محاسبه پایه‌های گربنر، محققان این اختیار را پیدا می‌کنند که روابط جبری پیچیده‌تر را به شکل‌های قابل مدیریت‌تری الگوسازی کنند، در نتیجه شناسایی راه‌حل‌هایی را که ممکن است در نمایش اصلی خود پنهان باقی بمانند، تسهیل می‌کنند. تفسیر هندسی این دستگاه‌ها همچنین امکان تجسم تعامل توابع چندجمله‌ای را فراهم می‌کند و راه‌های جدیدی را برای تحلیل باز می‌کند که می‌تواند منجر به اصول طراحی

نوآورانه شود. علاوه بر این، ادغام دستگاه‌های گریبنر با ابزارهای محاسباتی روشی را که در عمل به مسائل ریاضی نزدیک می‌شوند متحول کرده است. با ظهور نرم افزارهای پیچیده که قادر به مطالعه‌ی ساختارهای جبری به طور خودکار هستند، پتانسیل کاربرد در دنیای واقعی حتی بیشتر می‌شود. مهندسان اکنون قادر به شبیه‌سازی و بهینه‌سازی طرح‌ها با دقت بی‌سابقه‌ای هستند و چالش‌هایی را با سطح سختی که اغلب در روش‌شناسی‌های قبلی دست نیافتنی بود، برطرف می‌کنند. علاوه بر این، تعامل بین دستگاه‌های گریبنر و سایر مفاهیم ریاضی، مانند هندسه جبری، چارچوب نظری را که دانشمندان مدرن در آن عمل می‌کنند، غنی می‌کند. این اشتراک چند وجهی نه تنها همکاری بین رشته‌ها را تقویت می‌کند، بلکه الهام‌بخش تکامل مداوم تکنیک‌ها است که منجر به پیدایش راه‌حل‌های جدید برای مشکلات قدیمی می‌شود. با پیشروی به عصری که قدرت محاسباتی همچنان در حال افزایش است، نقش دستگاه‌های گریبنر به عنوان ابزاری اساسی در علم و مهندسی در حال گسترش است و فصل جدیدی از اکتشاف و نوآوری را نوید می‌دهد.

تشکر و قدردانی

این پیش نویس، بخشی از نتایج پروژه فرصت مطالعاتی صنعت و جامعه اینجانب در شرکت دانش بنیان دانشجویان خاوران است. همچنین، صمیمانه از نظرات و پیشنهادات ارزشمند داوران که کیفیت مقاله را افزایش داده است سپاسگزارم.

References

- [1] Buchberger, B. (2006). "Bruno Buchberger's PhD thesis 1965: An algorithm for finding the basis elements of the residue class ring of a zero-dimensional polynomial ideal, *J. Symb. Comput.*, 41 (3-4), 475-511. <https://doi.org/10.1016/j.jsc.2005.09.007>
- [2] Weispfenning, V. (1992). Comprehensive Gröbner bases, *Journal of Symbolic Computation*, 14, (1), 1-29. [doi:10.1016/0747-7171\(92\)90023-W](https://doi.org/10.1016/0747-7171(92)90023-W).
- [3] Becker, T., & Weispfenning, V. (1993). Gröbner bases: A computational approach to commutative algebra. In cooperation with Heinz Kredel., New York: Springer-Verlag. https://books.google.com/books/about/Gr%C3%B6bner_Bases.html?id=tkPtBwAAQBAJ
- [4] Cox, D. A., Little, J., & O'Shea, D. (2005). *Using algebraic geometry*. Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/b138611>.
- [5] Buchberger, B. (1979). A criterion for detecting unnecessary reductions in the construction of Gröbner bases, in *International Symposium on Symbolic and Algebraic Manipulation*, 3-21. https://doi.org/10.1007/3-540-09519-5_52
- [6] Lazard, D. (1983). Gröbner bases, Gaussian elimination and resolution of systems of algebraic equations, in *European Conference on Computer Algebra*, 146-156. https://doi.org/10.1007/3-540-12868-9_99

- [7] Faugère, J.-C. (1999). A new efficient algorithm for computing Gröbner bases (F4), *Journal of Pure and Applied Algebra*, 139 (1-3), 61-88. [https://doi.org/10.1016/S0022-4049\(99\)00005-5](https://doi.org/10.1016/S0022-4049(99)00005-5)
- [8] Faugère, J.-C. (2002). A new efficient algorithm for computing Gröbner bases without reduction to zero (F_5), *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, 75-83. <https://doi.org/10.1145/780506.780516>
- [9] Dehghani Darmian, M. (2024). Efficient Algorithm for Computing Inverse of Parametric Matrices, *Scientific Annals of Computer Science*, 1, 1-22. [doi:10.47743/SACS.2024.1.1](https://doi.org/10.47743/SACS.2024.1.1).
- [10] Dehghani Darmian, M., & Hashemi, A. (2017). Parametric FGLM algorithm, *Journal of Symbolic Computation*, 82, 38-56. [doi:10.1016/j.jsc.2016.12.006](https://doi.org/10.1016/j.jsc.2016.12.006).
- [11] Hashemi, A., M.-Alizadeh, B., & Dehghani Darmian, M. (2013). Minimal polynomial systems for parametric matrices, *Linear and Multilinear Algebra*, 61 (2), 265-272. [doi:https://doi.org/10.1080/03081087.2012.670235](https://doi.org/10.1080/03081087.2012.670235).
- [12] Dehghani Darmian, M. (2026). Efficient Computation of Minimal Generating Sets for Parametric Polynomial Ideals Using Gaussian Elimination, *Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A: Physical Sciences*. <https://link.springer.com/article/10.1007/s40010-026-01138-7>
- [13] Dehghani Darmian, M. (2026). The Detect-Condition Algorithm for Robotic Inverse Kinematics and Common Root Analysis, *Annals of Optimization With Applications*, 2(1), 75-90, <https://doi.org/10.48314/anowa.v2i1.68>
- [14] Montes, A. (2002). A new algorithm for discussing Gröbner bases with parameters, *J. Symb. Comput.*, 33 (2), 183-208. [doi:10.1006/JSCO.2001.0504](https://doi.org/10.1006/JSCO.2001.0504).
- [15] Dehghani Darmian, M. (2025). Inverse Kinematic Solution for Romin Robot Based on Computer Algebra Techniques, *Karafan Quarterly Research Journal*, 22, 580-606, (In Persian), <https://doi.org/10.48301/kssa.2024.450007.2876>.
- [16] Dehghani Darmian, M. (2026). Intelligent classification of polynomial curves with parametric coefficients, *Karafan Quarterly Research Journal, to appear (In Persian)*, [doi: 10.48301/kssa.2024.480774.3007](https://doi.org/10.48301/kssa.2024.480774.3007)
- [17] Hashemi, A., Dehghani Darmian, M., & Barkhordar, M. (2018, July 24-27). Universal Gröbner basis for parametric polynomial ideals, in *Mathematical Software-ICMS 2018: 6th International Conference, South Bend, IN, USA, Proceedings* Springer, 191-199. [doi:http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-96418-8_23](https://doi.org/10.1007/978-3-319-96418-8_23).
- [18] Montes, A., & Castro, J. (1995). Solving the load flow problem using the Gröbner basis. *SIGSAM Bull.* 29 no. 1, 1-13. <https://silice.es/publication/6f3223b5-768e-4ea5-9641-c77888d08603>
- [19] Kalkbrener, M. (1997). On the stability of Gröbner bases under specializations, *J. Symb. Comput.*, 24(1), 51-58. <https://doi.org/10.1145/3666000.3669718>
- [20] Dehghani Darmian, M., Hashemi, A., & Montes, A. (2011). Erratum to "A new algorithm for discussing Gröbner bases with parameters" *J. Symb. Comput.* 33 (1-2)(2002) 183-208, *J. Symb. Comput.*, 46 (10), 1187-1188. [doi:10.1016/J.JSC.2011.05.002](https://doi.org/10.1016/J.JSC.2011.05.002).

- [21] Suzuki, A., & Sato, Y. (2006). A simple algorithm to compute comprehensive Gröbner bases using Gröbner bases, in *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, 326-331. [doi:10.1145/1145768.1145821](https://doi.org/10.1145/1145768.1145821).
- [22] Kapur, D., Sun, Y., & Wang, D. (2010). A new algorithm for computing comprehensive Gröbner systems, in *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, 29-36. [doi:10.1145/1837934.1837946](https://doi.org/10.1145/1837934.1837946).
- [23] Hashemi, A., & Dehghani Darmian, M., & M.-Alizadeh, B., (2012). Applying Buchberger's criteria on Montes's DisPGB algorithm, *Bull. Iran. Math. Soc.* 38 no. 3, 715-724. https://bims.iranjournals.ir/article_236.html.
- [24] Dehghani Darmian, M., & Hashemi, A. (2024). Parametric F_4 Algorithm, *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics*, 19 (4), 117-133. [doi:http://dx.doi.org/10.61186/ijmsi.19.1.117](http://dx.doi.org/10.61186/ijmsi.19.1.117).
- [25] Dehghani Darmian, M. (2025). Elevating PGBMain Algorithm Performance Through Strategic Minimal Dickson Basis Selection, *Computational Algorithms and Numerical Dimensions*, 4, 308-317, <https://doi.org/10.22105/cand.2025.507063.1188>
- [26] Hashemi, A., Dehghani Darmian, M., & Barkhordar, M. (2017). Gröbner systems conversion, *Mathematics in Computer Science*, 11, 61-77. [doi:10.1007/S11786-017-0295-3](https://doi.org/10.1007/S11786-017-0295-3).
- [27] Dehghani Darmian, M. (2026). An Algorithm for Minimal Generating Set of Parametric Homogeneous Polynomial Ideals, *Journal of Prime Research in Mathematics*, 22(1), 61-75. [doi:10.1007/s40010-026-01138-7](https://doi.org/10.1007/s40010-026-01138-7).
- [28] Dehghani Darmian, M. (2024). Improvement of an incremental signature-based comprehensive Gröbner system algorithm, *Math. Comput. Sci*, 18 (12). [doi:http://dx.doi.org/10.1007/s11786-024-00587-w](http://dx.doi.org/10.1007/s11786-024-00587-w).
- [29] Dehghani Darmian, M. (2025). A Computer Algebra Approach to Linear ODE Systems with Parametric Coefficients, *Control and Optimization in Applied Mathematics*, no. 2, 135-152, 10 (2025) [doi. 10.30473/coam.2025.74498.1307](https://doi.org/10.30473/coam.2025.74498.1307)