



Pedagogical Strategies in Teaching the Figural Pattern Generalization in Math Classrooms

Robabeh Afkhami Banaem¹, Nasim Asghary^{2*} , Alireza Medghalchi³

¹Doctoral student of mathematics education, Department of Mathematics & Computer Science, Islamic Azad University, Central Tehran Branch, Tehran, Iran.

²Associate professor, Department of Mathematics & Computer Science, Islamic Azad University, Central Tehran Branch, Tehran, Iran.

³Full Professor, Department of Mathematics, Faculty of Mathematical sciences, Kharazmi University, Tehran, Iran.

ARTICLE INFO

Article Type:

Original Research

Received: 06.25.2023

Revised: 09.09.2023

Accepted: 10.07.2023

Keyword:

Generalization

Function

The Two Variable Figural Pattern

R3 Space

Pedagogical Strategies

*Corresponding Author:

Nasim Asghary

Email: nas.asghari@iauctb.ac.ir

ABSTRACT

The concept of function is the algebraic concept in technical and vocational mathematics, which due to the poor performance of students, needs proper teaching in the classroom. Figural patterns are a powerful tool to understand functional relationships tangibly and help students improve their understanding of the concept of function. The purpose of this research was to investigate the performance of students in generalizing four categories of figural patterns including one variable- linear, one variable- nonlinear, two variable- linear, and two variable -nonlinear [1], and providing pedagogical strategies in teaching figural patterns. In this study, a sample of 220 seventh-grade students participated in a test with the content of figural patterns, and the performance of the students was analyzed quantitatively and qualitatively. According to the analysis of the concept of two-variable figural patterns, variable and R3 space were investigated as two basic concepts. The results of the test showed that the percentage of students' responses to the one variable- linear figural pattern task was close to the two variable- linear, and the percentage of students' responses to the one variable-nonlinear figural pattern task was close to the two variable- nonlinear patterns. Based on the problems of students in the variable and R3 space concepts, pedagogical strategies such as focusing on components of variable in function relation and helping to compress two-dimensional changes in a relationship were proposed. Education in the two-variable figural pattern generalization can be an incomparable basis for a better understanding of the function.

EXTENDED ABSTRACT

Introduction

The concept of function is as the algebraic concepts in technical and vocational mathematics, which due to the poor performance of students, needs proper teaching in the classroom. Figural patterns are a powerful tool to understand functional relationships in a tangible way and help students to improve their understanding of the concept of function. The purpose of this research, which is a part of a wider research, is to investigate the performance of students in generalizing four categories of figural patterns including one variable- linear, one variable- nonlinear, two variable- linear, two variable –nonlinear and providing pedagogical strategies in teaching two-variable figural patterns. In this research, the following questions were answered:

- 1- What is the performance of students in figural pattern generalization?
- 2- What are the pre-concepts in teaching the generalization of two variable figural patterns, and what pedagogical strategies can be implemented?

Methodology

In this study, 220 seventh-grade students of male and female schools in Malekan city (East Azerbaijan) were given a test with the content of figural patterns, and the performance of the students was analyzed quantitatively and qualitatively (content analysis). The validity of the test was confirmed by three experts in mathematics education and four experienced teachers. Internal consistency of questions was estimated with Cronbach's Alpha and reported to be 0.69.

Results and discussion

According to the analysis of the concept of two-variable figural patterns, variable and R^3 space were investigated as two basic concepts. The results of the test showed that the percentage of students' responses to the one variable- linear figural pattern task (57%) was close to the two variable- linear (45%), and the percentage of students' responses to the one variable- nonlinear figural pattern task (17%) was close to the two variable –nonlinear (10 %). According to the results, pedagogical strategies were proposed in teaching the two variable figural pattern generalization. Education in the two-variable figural pattern generalization can be an incomparable basis for a better understanding of the function.

Conclusion

Figural patterns give the ability to students to practice writing functional relations and mathematical modeling, and as Rivera (2013) states, students who worked on the generalization of patterns without being trained in functions and modeling were able to answer the questions in this area. Seventh-grade students learn about two-dimensional space in their math textbooks. They also learn the two-dimensional Cartesian coordinate system. Before formal learning, they experienced and learned the two-dimensional space. However, in two-variable patterns, it is necessary to become familiar with three-dimensional space. To do so, instead of changing one variable, it is enough to change two

variables. Also, because independent and dependent variables must be distinguished in two-variable figural patterns, it seems that presenting two-variable patterns is richer in terms of meaningful teaching and learning of the variable concept.

According to the generalization questions of patterns with the same characteristics (such as square shape, continuity, and appearance similarity according to Gestalt principles) and only differences in variable number and linear/non-linearity, it seems that variable number and linear/non-linearity should not be a determining factor in the success of generalization. This is because the degree of success in generalization of a one-variable linear pattern has the highest correlation with a two-variable-linear pattern, and a variable-nonlinear figural pattern has the highest correlation with a two-variable-nonlinear pattern. In terms of the similarity of students' performance in linear and non-linear patterns as well as one-variable and two-variable patterns, according to the research background and experimental studies of the researcher (Afkhami et al., 2019) and considering the two basic concepts of variables in the functional relationship and R^3 space, suggestions were proposed to solve the students' problems in dealing with general two-variable figural patterns, and the teaching and learning path of these patterns was determined.

Table, Figure and Equations

	$1n$	$2n$	$3n$	$4n$
$1n$	رابطه ۱	رابطه ۲	رابطه ۳	
$2n$	رابطه ۲	رابطه ۳	رابطه ۴	
$3n$	رابطه ۳	رابطه ۴	رابطه ۵	۲
$4n$	رابطه ۴	۲		۲

n در ستون همان عدد رابطه است

Figure 1. An unsuccessful example in combining the changes of two dimensions in one relationship.

$$n + \text{تعداد شکل} = m$$

Figure 2. Failure to distinguish between dependent and independent variables.

Table 1. Correlation of students' responses to four categories of figural patterns.

Correlations					
		q1	q2	q3	q4
Spearman's rho	Correlation Coefficient	1.000	.425**	.464**	.318**
	q1 Sig. (2-tailed)	.	.000	.000	.000
	N	188	188	188	188
	Correlation Coefficient	.425**	1.000	.374**	.436**
q2	Sig. (2-tailed)	.000	.	.000	.000
	N	188	188	188	188

Correlations					
		q1	q2	q3	q4
q3	Correlation Coefficient	.464**	.374**	1.000	.402**
	Sig. (2-tailed)	.000	.000	.	.000
	N	188	188	188	188
q4	Correlation Coefficient	.318**	.436**	.402**	1.000
	Sig. (2-tailed)	.000	.000	.000	.
	N	188	188	188	188

** . Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Summary

Figural pattern generalization has a unique capacity to enhance functional thinking (Mark Wart, 2010). In addition, in studying longitudinally 11-year-old students, Rivera (2013) states that students were able to solve modeling/function questions after working with pattern generalization tasks without being trained in modeling and functions. Therefore, without any doubt, attention to figural pattern generalization will promote functional thinking and can be an incomparable basis for a better understanding of the variable concept (in terms of being dependent and independent) and solving two-variable problems and modeling. In this regard, quantitative and qualitative research was carried out to investigate the performance of students in two variable figural pattern generalizations for helping to design the teaching and learning path of these patterns.



راهکارهای پداگوژیکی برای تدریس تعمیم الگوهای شکلی در کلاس درس ریاضی

ربابه افخمی^۱، نسیم اصغری^{۲*}، علیرضا مدقالچی^۳

- ۱- دانشجوی دکتری آموزش ریاضی، گروه ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی، تهران، ایران.
- ۲- دانشیار، گروه ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی، تهران، ایران.
- ۳- استاد تمام، گروه ریاضی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران.

چکیده

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

دریافت مقاله: ۱۴۰۲/۰۴/۰۴

بازنگری مقاله: ۱۴۰۲/۰۶/۱۸

پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۰۷/۱۵

کلید واژگان:

تعمیم

تابع

الگوهای شکلی دومتغیره

فضای R^3

راهکارهای پداگوژیکی

مفهوم تابع از جمله مفاهیم جبری در ریاضیات فنی و حرفه‌ای می‌باشد که بنابر عملکرد ضعیف هنرجویان نیاز به آموزش‌های مناسب در کلاس درس دارد. الگوهای شکلی، ابزاری قدرتمند برای درک روابط تابعی به صورت محسوس هستند و باعث ارتقای هنرجویان در درک مفهوم تابع می‌شوند. هدف این تحقیق بررسی عملکرد دانش‌آموزان در تعمیم چهار دسته الگوی شکلی شامل؛ الگوی شکلی یک‌متغیره خطی، یک‌متغیره درجه دوم، الگوی شکلی دومتغیره دو خطی و دومتغیره کلی [۱] و ارائه راهکارهای پداگوژیکی در آموزش الگوهای شکلی بود. در این مطالعه یک نمونه‌ی ۲۲۰ نفری از دانش‌آموزان پایه‌ی هفتم در آزمونی با محتوای الگوهای شکلی شرکت کردند و عملکرد دانش‌آموزان به صورت کمی و کیفی (تحلیل محتوا) تحلیل شد. با توجه به تحلیل مفهوم الگوهای شکلی دومتغیره، دو مفهوم پایه‌ای متغیر و فضای R^3 مورد بررسی قرار گرفت. نتایج آزمون نشان داد که درصد پاسخگویی دانش‌آموزان به تکالیف الگوهای شکلی یک متغیره خطی (۵۷ درصد) به دو متغیره دو خطی (۴۵ درصد)، و درجه‌ی دوم یک متغیره (۱۷ درصد) به دو متغیره کلی (۱۰ درصد) نزدیک است. با توجه به مشکلات دانش‌آموزان در دو مفهوم متغیر و فضای R^3 ، راهکارهای پداگوژیکی در آموزش تعمیم الگوهای شکلی دو متغیره از جمله توجه به مؤلفه‌های متغیر در رابطه‌ی تابعی و کمک به فشرده کردن تغییرات دو بعد، پیشنهاد گردید. آموزش به هنگام تعمیم الگوهای شکلی دومتغیره می‌تواند زمینه ساز بی‌بدیلی برای درک بهتر مفهوم تابع باشد.

*نویسنده مسئول: نسیم اصغری

پست الکترونیکی:

nas.asghari@iauctb.ac.ir

مقدمه

اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای [۲] در شاخه جبر استانداردهایی را مطرح می‌کند که توسعه‌ی فهم دانش‌آموزان از نمادین‌سازی جبری و به ویژه درک مفهوم متغیر را از نیازهای اساسی دانش‌آموزان می‌داند. اهمیت جبر در ریاضی مدرسه‌ای به گونه‌ای است که کاپوت^۱ (۲۰۰۸) از آن به عنوان بخشی از سواد عددی یاد می‌کند و از نادیده گرفتن تفکر جبری بر حذر می‌دارد چون این کار باعث باز ماندن از تفکر جبری می‌شود که لازمه‌ی حضور افراد در جامعه دموکراتیک است [۳]. نقش و مسئولیت مدارس و دانشگاه‌ها برای مشارکت جامع در آموزش‌های فنی و حرفه‌ای و توسعه‌ی شایستگی‌های دانش‌آموزان و دانشجویان و شاغلین کشور بسیار حیاتی و تعیین‌کننده است [۴]. جبر جزو محتواهای اصلی در آماده کردن افراد برای موقعیت‌های شغلی در نظر گرفته شده است و در کتاب‌های ریاضی فنی و حرفه‌ای جزو مفاهیم پایه است که آموزش آن ضروری محسوب می‌شود. مفاهیم تابع، تابع‌های خطی و درجه دوم و کاربرد آن‌ها در حل معادلات جزو مفاهیم مطرح است و لیکن بررسی عملکرد هنرجویان فنی حرفه‌ای نشان از عدم درک درست از این مفاهیم دارد [۵]. تفکر تابعی نیز شاهراه تفکر جبری است [۶] و معلمان بایستی آن را به عنوان قلب و روح آموزش ریاضی به شمار آورند. تفکر جبری نتیجه‌ی طبیعی رشد شناختی نیست و برای ایجاد آن به آموزش و موقعیت‌های آموزشی نیاز است [۷] (نقل از [۳]). تعمیم الگوهای شکلی ظرفیتی بی‌نظیر برای ارتقای تفکر تابعی و به تبع آن ارتقای درک مفهوم متغیر دارند [۸]. از این رو در ریاضیات مدرسه‌ای ضرورت پرداختن به چنین الگوهایی جای تردید ندارد و باید با روش‌های درست آموزشی در کلاس درس از آن‌ها بهره برد. استفاده از روش‌های نوین تدریس برای دستیابی به پیشرفت و یادگیری و ایجاد انگیزه در دانش‌آموزان امری ضروری است [۹]. رپورا^۲ (۲۰۱۳) در نتیجه‌ی یازده سال مطالعه روی تعمیم الگوها، بیان می‌کند که دانش‌آموزان پس از یادگیری تعمیم الگوهای شکلی بدون آموزش مدلسازی توابع می‌توانستند به سوالات مدلسازی پاسخ دهند [۱۰]. در واقع الگوهای شکلی بازنمایی محسوسی از توابع هستند [۸] و این مفهوم را برای دانش‌آموزان قابل لمس و درک می‌کنند. بنابراین می‌توان از ظرفیت چنین الگوهایی برای ایجاد تعمیق در درک متغیرها و توانایی مدلسازی و حل مسئله‌ی دانش‌آموزان قدم مهمی برداشت. اکثر مسائل واقعی در زندگی روزمره و موقعیت‌های شغلی با بیش از یک متغیر رخ می‌دهند و برای فائق آمدن بر چنین موقعیت‌هایی باید زمینه‌های آموزشی فراهم گردد. الگوهای شکلی دومتغیره در یک بافت آشنا دانش‌آموزان را در درک مسائل دنیای واقعی توانمند نموده و مهارت‌های آن‌ها را در رویایی با این مسائل افزایش خواهند داد. همچنین این حوزه زمینه‌ساز مناسبی برای درک عمیق برخی مفاهیم از جمله توابع دومتغیره و مدلسازی است. در این تحقیق به سؤالات زیر پاسخ می‌دهیم:

- ۱- عملکرد دانش‌آموزان در تعمیم الگوهای شکلی چگونه است؟
- ۲- آموزش تعمیم الگوهای شکلی دو متغیره چه مفاهیم پیش‌نیازی دارد و چه راهکارهای پداگوژیکی می‌توان اجرا کرد؟

با توجه به تحلیل مفهوم الگوهای شکلی دومتغیره و ادبیات تحقیق مربوط به الگوها، دو مفهوم مرتبط با آن، متغیر و فضایسه‌بعدی R^3 شناسایی شدند که در بخش بعدی به هر کدام پرداخته خواهد شد.

تعمیم الگوهای شکلی و تفکر تابعی

توجه به الگوهای شکلی فرصتی را فراهم می‌کند تا دانش‌آموزان معنا و مفهوم متغیر و چگونگی استفاده از آن‌ها را درک کنند. الگوها، بازنمایی محسوسی از روابط تابعی هستند که دانش‌آموزان با پرسیدن این سؤال که چه چیزی تغییر می‌کند و چه چیزی ثابت می‌ماند، مشترکات را از موارد خاص تجرید می‌کنند. تعمیم الگوها در ریاضیات مدرسه‌ای به

^۱ Kaput^۲ Rivera

عنوان مسیری برای ارتقای تفکر تابعی و آشنایی با متغیرها و در نتیجه ارتقای تفکر جبری در نظر گرفته می‌شود. تفکر تابعی نوعی از تفکر جبری است که تمرکز آن به عنوان یک فعالیت شناختی روی روابط بین دو کمیت تغییرکننده (یا بیشتر) است به ویژه نوعی از تفکر است که منجر به تعمیم روابط بین موارد خاص می‌شود [۱۱] (نقل از [۱۲]). در رویکرد جبر ثابت، به جای تاکید بر توابع، تمرکز بر "حل کردن برای یافتن X " در معادلات هست که X به عنوان یک عدد مجهول منحصر به فرد است. در رویکرد تابعی در عبارتهای جبری با X به عنوان یک متغیر برخورد می‌شود که مقادیر مختلفی می‌تواند بگیرد. این رویکرد دانش‌آموزان را ترغیب می‌کند تا از تفکر درباره عملیات روی اعداد خاص به تفکر درباره روابط بین متغیرها حرکت کنند. الگوهای شکلی مشخصه‌هایی دارند که برای شروع تعمیم مطلوب هستند. دانش‌آموزان در مسائل الگوها با کمی راهنمایی و کمک می‌توانند از عهده یافتن رابطه بین اجزا برآیند در حالی که به‌ندرت در مسائل دیگر از جمله مسائل کلامی آمادگی این شناسایی ظریف را دارند. بنابراین الگوهای شکلی برای ورزیده‌کردن دانش‌آموزان در یافتن رابطه و بیان آن می‌تواند راه را در مسائل دیگر هموار کند. منظور از الگوهای شکلی دنباله‌ای از اشکال است که اشیا در شکل از موردی به مورد دیگر تغییر می‌کنند، به طوریکه این تغییرات قابل پیشگویی است. این الگوها معمولاً شامل دو نوع متغیرند؛ یکی جنبه‌های قابل تعیین از این اشیا (متغیرهای وابسته) و دیگری سیستم‌های شمارش یا اندیس‌گذاری (متغیرهای مستقل). رابطه‌ی تابعی در این الگوها رابطه‌ای است که بین شماری مرحله و بعضی وجوه این الگوها تشخیص داده می‌شود. یورسینی و تریگورس (۲۰۰۳) متغیرها را با توجه به کاربرد اصلی آن‌ها در جبر مقدماتی به سه دسته تقسیم بندی کرده‌اند و نشان داده‌اند که بسیاری از دانش‌آموزان نمی‌توانند بین کاربردهای مختلف متغیر به عنوان مجهول خاص، عدد عمومی و رابطه‌ی تابعی تمایز قائل شوند [۱۳] (نقل از [۱۴]). در این مدل برای هر سه کاربرد توانایی‌های متفاوتی شناسایی شده‌اند و به تفکیک ارائه شده‌اند. دانش‌آموزان برای درک متغیر به عنوان مجهول خاص باید قادر به شناسایی مجهول در مسئله باشند و برای درک متغیر به عنوان عدد عمومی باید بتوانند مقادیر بی‌شماری را به متغیر نسبت دهند. همچنین دانش‌آموزان برای درک متغیر در رابطه‌ی تابعی باید بتوانند رابطه‌ی بین متغیرهای مرتبط را در مسئله تشخیص دهند. یورسینی و تریگورس (۲۰۰۳) توانایی‌های لازم برای درک متغیر در رابطه‌ی تابعی را چنین ذکر کرده‌اند:

- ۱- تشخیص رابطه‌ی بین متغیرهای مرتبط، مستقل از بازنمایی‌های آن در جدول، نمودارها، مسائل کلامی و عبارات تحلیلی؛ مثال: به دوست خود توضیح دهید الگوی شماره ۵ را چگونه می‌کشید؟
- ۲- تعیین مقادیر متغیرهای وابسته با توجه به مقدار متغیر مستقل داده شده؛ مثال: در شماره شکل ۳۲ چند مربع وجود دارد؟
- ۳- تعیین مقادیر متغیرهای مستقل داده شده با توجه به مقدار متغیر وابسته‌ی داده شده؛ مثال: در شکل شمار ۵ چند، ۱۰۲ مربع وجود دارد؟
- ۴- تشخیص تغییرات مشترک متغیرهای موجود در رابطه، مستقل از بازنمایی‌های آن در جدول، نمودارها، مسائل کلامی و عبارات تحلیلی؛ مثال: با سه برابر شدن n (شماره شکل) الگو چگونه تغییر می‌کند؟
- ۵- تعیین بازه‌ی تغییرات یک متغیر با توجه به بازه‌ی تغییرات دیگر؛ مثال: بین کدام مقادیر n الگو بین ۵۵ تا ۱۸۵ شکل دارد؟
- ۶- نماد سازی رابطه‌ی تابعی بنابر تجزیه و تحلیل داده‌های مسئله؛ مثال: رابطه‌ای بنویسید که با آن تعداد مربع‌ها را در هر الگوی دلخواه به دست آورید.

تعمیم الگوهای شکلی دو متغیره و فضای R^3

در الگوهای شکلی یک متغیره، طرح‌واره‌ی مورد نیاز، فضای دوبعدی R^2 است. یک متغیر مستقل وجود دارد که مربوط به شماره‌ی شکل و یا مرحله‌ی الگو است و یک متغیر وابسته که مربوط به یک جنبه‌ی قابل تعیین از الگو هست. در الگوهای شکلی دومتغیره، طرح‌واره‌ی فضای سه‌بعدی برای تعمیم نیاز هست. در این فضا دو متغیر مستقل و یک متغیر وابسته وجود دارد و برای درک این فضا ساختار شناختی جدیدی نیاز نیست. آنچه که در انتقال از فضای دو بعدی به سه‌بعدی رخ می‌دهد می‌تواند مکانیسم جذب در تعمیم توسعه‌ای باشد. در واقع جذب دانش به مکانیسمی اشاره دارد که فرد به وسیله‌ی آن می‌تواند یک ساختار شناختی را ضرورتاً بدون تغییر استعمال کند تا شی شناختی را که فرد قبلاً با آن برخورد نکرده است، شامل شود. هرل و تال^۱ (۱۹۸۹) نیز تعمیم را از منظر شناختی و تشکیل طرح‌واره در سه دسته طبقه‌بندی می‌کنند: تعمیم توسعه‌ای^۲، تعمیم بازسازی‌کننده^۳ و تعمیم منفصل^۴ [۳]. در تعمیم توسعه‌ای فرد دامنهی کارآمدی یک طرح‌واره را گسترش می‌دهد، بدون اینکه بخواهد طرح‌واره را بازسازی کند. در واقع این تعمیم شامل توسعه دادن اطلاعات موجود بدون تغییر در مفاهیم و ایده‌های قبلی است [۱۵]. در این تعمیم اطلاعات جدید باید به اطلاعات جاری نزدیک بوده و در حوزه‌ی یکسانی باشند. به عنوان مثال در فضای برداری دانشجویان ابتدا روی R و R^2 می‌آموزند. سپس مؤلفه‌ی دیگری به صفحه‌ی R^2 افزوده می‌شود و فضای R^3 به آن‌ها معرفی می‌شود. اگر چه فضای معرفی شده جدید هست ولی نیازی به تغییر در طرز فکر و انگاره‌های جاری آن‌ها نیست [۱۶]. در تعمیم بازسازی‌کننده فرد یک طرح‌واره‌ی موجود را بازسازی می‌کند تا بتواند دامنهی کارآمدی آن را گسترش دهد. در تعمیم منفصل، فرد در حرکت از یک موقعیت آشنا به یک موقعیت جدید، برای کنار آمدن با موقعیت جدید، یک طرح‌واره‌ی جدید و جدا از طرح‌واره‌ی قبلی می‌سازد و آن را به طرح‌واره‌هایش اضافه می‌کند. از نظر هرل و تال (۱۹۸۹) مطلوب‌ترین رویکرد به تعمیم، فراهم آوردن تجربه‌هایی است که به یک درک معنادار از موقعیت منجر شده و شرایط حرکت به سوی موارد کلی را با استفاده از تعمیم توسعه‌دهنده ممکن سازد. الگوهای شکلی دومتغیره دانش‌آموزان را در معرض چنین تعمیمی قرار می‌دهد.

روش‌شناسی

جامعه‌ی تحقیق دانش‌آموزان پایه‌ی هفتم شهرستان ملکان از استان آذربایجان شرقی بود. در این تحقیق از یک نمونه ۲۲۰ نفری از دانش‌آموزان پایه‌ی هفتم مدرسه‌ی دخترانه و پسرانه‌ی شهرستان آزمونی با محتوای الگوهای شکلی یک‌متغیره‌ی خطی، یک‌متغیره‌ی درجه‌ی دوم، دومتغیره‌ی دوخطی و دومتغیره‌ی کلی به عمل آمد تا عملکرد آن‌ها در حل تکالیف الگوهای شکلی دومتغیره بررسی شود. ابتدا آزمون برای ۳۰ دانش‌آموز پایه هفتم و ۲۸ دانش‌آموز پایه هشتم به عنوان نمونه اجرا شد تا برآوردی از سطح سؤالات انجام شود. پایایی سؤالات با آلفای کرونباخ ۰٫۶۹ تایید شد. از نظر روایی محتوایی نیز دو متخصص آموزش ریاضی و سه دبیر ریاضی، سؤالات را مورد بررسی و تایید قرار دادند. از بین ۲۲۰ برگه‌ی پاسخ، ۱۸۸ برگه تحلیل و کدگذاری گردید. ۳۲ برگه‌ی پاسخ به دلیل ناخوانا بودن و یا خالی بودن کنار گذاشته شد.

^۱ Harel & Tall

^۲ Expansive generalization

^۳ Reconstruction generalization

^۴ Disjunctive generalization

ابزار جمع آوری داده‌ها

تکالیف الگوهای شکلی، با توجه به پیشینه‌ی تحقیق و مطالعه‌ی توابع، و با توجه به مشخصه‌های تکالیف الگوها [۱۷] که تعداد متغیرها و خطی و غیر خطی بودن از جمله‌ی آن‌ها است، طبق دسته‌بندی محقق [۱] در چهار دسته طبق جدول ۱ قرار گرفت. ویژگی‌های زیر در طراحی الگوهای شکلی طراحی شده در این تحقیق، لحاظ شده است (مراجعه کنید به پیوست ۱):

- ۱- در همه سؤال‌ها از شکل مربع استفاده شد.
- ۲- همه الگوها ساختار پیوسته داشتند.
- ۳- همه الگوها با درجه وضوح یکسان طراحی شدند؛ به این معنی که متغیرهای مستقل در اشکال قابل دسترسی بود.
- ۴- همه الگوها درجه‌ی گشتالت یکسان داشتند؛ به این معنی که از نظر ظاهری ساختار مشابهی داشتند، به این صورت که اشکال یک میانه و دو تکه در بالا و پایین داشتند و با اصول گشتالت یکسانی ادراک می‌شدند.

جدول ۱. دسته‌بندی تکالیف الگوهای شکلی.

دسته‌بندی الگوهای شکلی	ویژگی‌های الگوهای شکلی
یک متغیره	خطی: رابطه‌ای که برای الگو نوشته می‌شود یک تابع خطی با یک متغیر مستقل است. این توابع به شکل کلی $f(x) = ax + b$ می‌باشند.
	درجه‌ی دوم: رابطه‌ای که برای الگو نوشته می‌شود یک تابع درجه دوم با یک متغیر مستقل است. این توابع به شکل کلی $f(x) = ax^2 + bx + c$ می‌باشند.
دو متغیره	دو خطی: رابطه‌ای که برای الگو نوشته می‌شود، تابع دو خطی با دو متغیر مستقل و یک متغیر وابسته است. این توابع نسبت به هردو متغیر خطی می‌باشند.
	دو متغیره کلی: رابطه‌ای که برای الگو نوشته می‌شود یک تابع دو متغیره است.

یافته‌ها و تحلیل یافته‌ها

در این بخش به دو سوال تحقیق به ترتیب پاسخ داده می‌شود و به تحلیل یافته‌ها در هر سوال پرداخته می‌گردد.

سوال ۱: عملکرد دانش‌آموزان در تعمیم الگوهای شکلی چگونه است؟

جدول ۲ تعداد و درصد دانش‌آموزان موفق در تعمیم چهار دسته الگوی شکلی را نشان می‌دهد. تنها ۱۰ درصد دانش‌آموزان به الگوی شکلی دو متغیره‌ی کلی در آزمون اولیه پاسخ درست داده‌اند که نزدیک به درصد پاسخگویی به الگوی شکلی خطی درجه دوم است. ۴۵ درصد دانش‌آموزان به الگوی شکلی دو متغیره‌ی دو خطی پاسخ درست داده‌اند که این درصد نزدیک به درصد پاسخگویی به الگوی شکلی یک متغیره‌ی خطی است.

جدول ۲. درصد پاسخگویی نمونه دانش‌آموزی به تکالیف الگوهای شکلی.

سوالات	تعداد دانش‌آموزان موفق در تعمیم
الگوی شکلی یک متغیره‌ی خطی (Q1)	۱۲۶
الگوی شکلی یک متغیره‌ی درجه دوم (Q2)	۳۹
الگوی شکلی دو متغیره‌ی دو خطی (Q3)	۱۰۰
الگوی شکلی دو متغیره‌ی کلی (Q4)	۲۴

درصد پاسخگویی دانش آموزان به دسته‌ی الگوها در این تحقیق قابل تامل است: پاسخگویی صحیح به سوالات الگوی خطی (۵۷ درصد) و دو خطی (۴۵ درصد) نزدیک به هم است؛ وقتی افزایش در یک بعد یا دو بعد به صورت خطی هست برای دانش آموزان میزان دشواری نوشتن رابطه‌ی تابعی الگو برای هر دو الگو تقریباً یکسان است، با این که در کتاب‌های درسی با الگوهای دو متغیره‌ی دو خطی مواجه نبوده‌اند و اندکی تغییر در میزان پاسخگویی شاید به همین دلیل باشد.

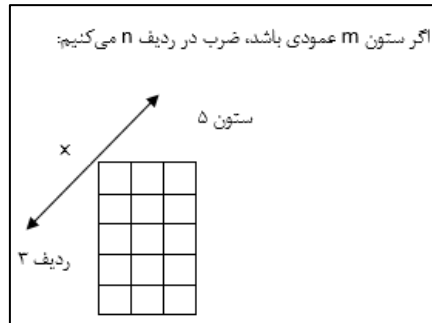
پاسخگویی به الگوی یک متغیره‌ی درجه دوم (۱۷ درصد) و الگوی دو متغیره‌ی کلی (۱۰ درصد) نزدیک به هم است؛ میزان پاسخگویی به الگوهای غیر خطی نسبت به خطی تفاوت بسیاری دارد. در الگوی درجه دوم پویایی بیشتری نسبت به خطی وجود دارد و به دلیل این که تغییر یک متغیر در دو جهت صورت می‌گیرد دانش آموزان در فشرده کردن تغییر در دو جهت به یک رابطه با سختی مواجه می‌شوند. در الگوهای شکلی دو متغیره کلی نیز به دلیل این که تغییرات غیر خطی در دو بعد رخ می‌دهد همان مشکل پیش می‌آید. شکل ۱ و شکل ۲ نمونه‌های موفق و ناموفق در فشرده کردن تغییر در دو بعد به یک رابطه را نشان می‌دهند.

	$1n$	$2n$	$3n$	$4n$
$1n$	ردیف ۱			
$2n$	ردیف ۲			
$3n$	ردیف ۳			؟
$4n$	ردیف ۴	؟		؟

n در ستون همان عدد ردیف است. n در ردیف همان عدد ستون است.

$n \times 1$	ردیف ۱
$n \times 2$	ردیف ۲
$n \times 3$	ردیف ۳
$n \times 4$	ردیف ۴
$m \times 1$	ستون ۱
$m \times 2$	ستون ۲
$m \times 3$	ستون ۳
$m \times 4$	ستون ۴

شکل ۱. نمونه‌ی ناموفق دانش آموزان در تلفیق تغییرات دو بعد در یک رابطه (پیوست ۱- تکلیف ۳).



شکل ۲. نمونه‌ی موفق دانش‌آموزان در تلفیق تغییرات دو بعد (پیوست ۱- تکلیف ۳).

دست‌ورزی‌های بی‌معنا و شانسی با اعداد استخراج شده از الگوهای شکلی نشان دهنده‌ی عدم درک متغیر در رابطه‌ی تابعی است که در مولفه‌های تریگورس و یورسینی (۲۰۰۳) به آن پرداخته شده است. شکل ۳ نشان می‌دهد این روابط عددی به شکل بی‌معنایی تبدیل به روابط جبری شده‌اند. شکل ۴ نیز نشان دهنده‌ی عدم درک دانش‌آموزان از مفهوم متغیر وابسته و مستقل است که این مشکل در الگوهای دو متغیره که شامل دو متغیر مستقل و یک متغیر وابسته است، بیشتر نمایان می‌گردد. شکل‌های ۱-۴ در پیوست ۲ به صورت مستند درج شده است.

۳	۸	۱۵	۲۴
$1 \times 2 + 1$	$2 \times 3 + 2$	$3 \times 4 + 3$	$4 \times 5 + 4$
$1 \times 2 + 3$	$2 \times 3 + 4$	$3 \times 4 + 5$	$4 \times 5 + 6$
۵	۱۰	۱۷	۲۶
$\text{رابطه} = n(n+1) + n + 2$			

شکل ۳. نمونه دست‌ورزی بی‌معنای دانش‌آموزان با اعداد استخراج شده از الگوهای شکلی (پیوست ۱- تکلیف ۲)

$$m = \text{تعداد شکل} + n$$

شکل ۴. نمونه‌ی تشخیص نادرست دانش‌آموزان از جایگاه متغیر وابسته و مستقل (پیوست ۱- تکلیف ۴).

جدول ۳ که مستخرج از نرم‌افزار SPSS 20 می‌باشد، همبستگی میزان عملکرد دانش‌آموزان در چهار دسته الگو را نشان می‌دهد. این همبستگی بین الگوی یک متغیره‌ی خطی و الگوی دو خطی حدوداً ۰,۴۶ و نیز بین الگوی درجه دوم یک متغیره و دو متغیره‌ی کلی تقریباً ۰,۴۳ می‌باشد که بین همبستگی‌ها به ترتیب بیشترین مقدار را دارند. این مطلب تاییدی بر نتیجه‌ی اولیه از درصد‌های پاسخگویی دانش‌آموزان می‌باشد که تعداد متغیرها دلیل اصلی ضعف دانش‌آموزان در تعمیم الگوهای شکلی دو متغیره ممکن است نباشد. بلکه پویایی تغییرات در دو بعد و همچنین آموزش ندیدن

دانش‌آموزان برای فشرده سازی تغییرات دو بعد می‌تواند دلیل اصلی باشد که پیشنهادهای ارائه شده در راستای رفع این نیازها می‌باشد. در بخش بعدی به این پیشنهادهای همراه مثال پرداخته می‌شود.

جدول ۳. همبستگی میزان پاسخگویی دانش‌آموزان به چهار دسته‌ی الگوهای شکلی.

Correlations					
		q1	q2	q3	q4
q1	Correlation Coefficient	1.000	.425**	.464**	.318**
	Sig. (2-tailed)	.	.000	.000	.000
	N	188	188	188	188
	Correlation Coefficient	.425**	1.000	.374**	.436**
q2	Sig. (2-tailed)	.000	.	.000	.000
	N	188	188	188	188
	Correlation Coefficient	.464**	.374**	1.000	.402**
	Sig. (2-tailed)	.000	.000	.	.000
q3	N	188	188	188	188
	Correlation Coefficient	.318**	.436**	.402**	1.000
	Sig. (2-tailed)	.000	.000	.000	.
	N	188	188	188	188

** . Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

سوال ۲. آموزش تعمیم الگوهای شکلی دومتغیره چه مفاهیم پیش نیازی دارد و چه راهکارهای پداگوژیکی می‌توان اجرا کرد؟

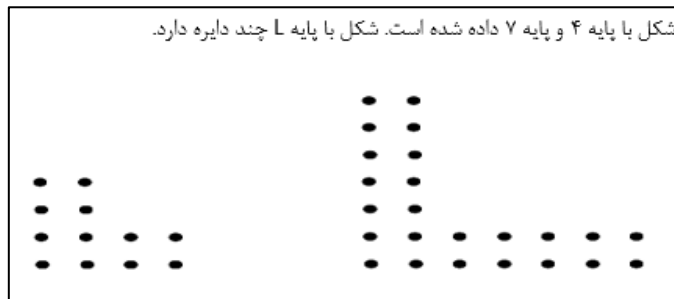
در این بخش با توجه به تحلیل مفهوم تعمیم الگوهای شکلی دومتغیره و با توجه به ادبیات تحقیق و همچنین میزان پاسخگویی دانش‌آموزان به چهار دسته تکلیف طراحی شده و همبستگی بین پاسخ‌ها به این چهار دسته تکلیف پیشنهادهایی توسط محقق ارائه می‌گردد که در آموزش بهتر الگوهای دو متغیره و بهره‌برداری از آن‌ها در یادگیری مفاهیم تابع دو متغیره و مسائل مدلسازی می‌تواند موثر باشد. با توجه به سوال اول مشکلی که خود را نشان می‌داد این بود که بچه‌ها در استفاده از متغیر در یک فضاییسه‌بعدی مشکل دارند. داده‌های مربوط به پاسخ‌های دانش‌آموزان به چهار دسته تکلیف گواه این مطلب است. پاسخ به این سوال دو در دو بخش تنظیم شده است. بخش اول متمرکز روی مشکل دانش‌آموزان در فشرده کردن تغییرات دو بعد است که مربوط به فضای R^3 می‌شود و بخش دوم متمرکز روی درک متغیر در رابطه تابعی است که به هر دو موضوع در ادبیات تحقیق پرداخته شده است:

فضای R^3

الگوهای دوخطی که در این تحقیق ارائه شد می‌تواند یک مورد کمکی باشد. چرا که این الگوها تغییرات خطی در دو بعد دارند و فشرده سازی تغییرات خطی در دو بعد برای آن‌ها آسان‌تر است. یک مثال از الگوی دوخطی در پیوست ۱ تکلیف ۴ آمده است.

الگوهای خطی پویاتر که سامسون^۱ (۲۰۱۱) در تحقیقات خود استفاده کرده است نیز می‌تواند مناسب باشد [۱۸]. برای اینکه دانش‌آموزان آمادگی تصور تغییر در دو متغیر را به دست بیاورند الگوهایی که در بیش از یک جهت تغییر می‌کنند و یا الگوهایی که به بصری سازی پویاتری نیاز دارند و در جهات مختلف تغییرات دارند، می‌تواند موثر باشد. به عنوان مثال الگوی شکل ۵ در دو جهت بالا و چپ تغییر می‌کند:

^۱ Samson



شکل ۵. الگوی شکلی پویا برگرفته از [۱۸].

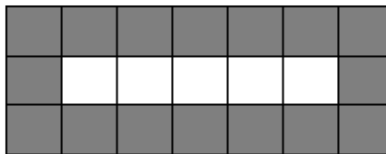
مسائل با موضوعات آشنای مساحت، تناسب و عبارت‌های جبری دو متغیره می‌تواند دانش‌آموزان را در درک فضایی‌بعدی و درک تغییرات دو بعد مستقل و تاثیر بر مقدار وابسته کمک کنند:

- مثال (۱) مساحت: اگر طول مستطیل را با L و عرض مستطیل را با W نشان دهیم، مساحت آن را با عبارت جبری بنویسید. اگر طول را ۳ برابر و عرض را ۷ برابر کنیم مساحت جدید را با عبارت جبری نشان دهید.
- مثال (۲) تناسب: ۹ نفر در ۱۸ دقیقه، ۵۴ ماهی صید می‌کنند، ۲۴ نفر در ۳۶ دقیقه، چند ماهی صید می‌کنند؟

- مثال (۳) عبارت جبری دو متغیره: اگر در مغازه‌ای n بسته مداد رنگی ۶ تایی و m بسته مداد رنگی ۱۲ تایی وجود داشته باشد، تعداد کل مداد رنگی‌ها را با عبارت جبری نشان دهید. اگر ۵ بسته ۶ تایی و ۸ بسته ۱۲ تایی وجود داشته باشد چند عدد مداد رنگی وجود دارد؟

توجه به نظریه‌ی تغییر مارتون و همکارانش^۱ در طراحی فعالیت‌ها می‌تواند مفید باشد. وی یادگیری را به عنوان تشخیص تغییرات می‌بیند؛ تشخیص روابطی که هنگام تغییر جنبه‌هایی خاص، ثابت می‌مانند [۱۹]. در مثال زیر برای اینکه دانش‌آموز به چگونگی تغییر همزمان در دو بعد طول و عرض پی ببرد، ابتدا یکی از ابعاد را ثابت گرفته و سؤالات با تغییر یک بعد مطرح می‌شود و سپس برعکس. با مشخص شدن چگونگی تغییر هر بعد، درک چگونگی تغییرات همزمان ابعاد، راحت‌تر صورت می‌گیرد:

- مثال (۴): راهرویی داریم که کاشی‌کاری آن به شکل زیر است: اگر ابعاد کاشی‌های وسط $L \times W$ باشد (L تا کاشی سفید در طول و W تا در عرض باشند) تعداد کاشی‌های سیاه چند تاست؟ (هدایت به سمت پاسخ با نظریه تغییر)



شکل ۶. تعمیم الگوی شکلی طبق نظریه تغییر.

- ۱- اگر کاشی‌های وسط $L \times 1$ باشد کاشی‌های سیاه چند تاست؟ رابطه بنویسید.
- ۲- اگر کاشی‌های وسط $L \times 3$ باشد کاشی‌های سیاه چند تاست؟ رابطه بنویسید.

¹ Marton & et al.

- ۳- اگر کاشی‌های وسط $L \times 10$ باشد کاشی‌های سیاه چند تاست؟ رابطه بنویسید.
- ۴- اگر کاشی‌های وسط $5 \times W$ باشد کاشی‌های سیاه چند تاست؟ رابطه بنویسید.
- ۵- اگر کاشی‌های وسط $10 \times W$ باشد کاشی‌های سیاه چند تاست؟ رابطه بنویسید.
- ۶- اگر کاشی‌های وسط $23 \times W$ باشد کاشی‌های سیاه چند تاست؟ رابطه بنویسید.
- ۷- اگر کاشی‌های وسط $L \times W$ باشد کاشی‌های سیاه چند تاست؟ رابطه بنویسید.

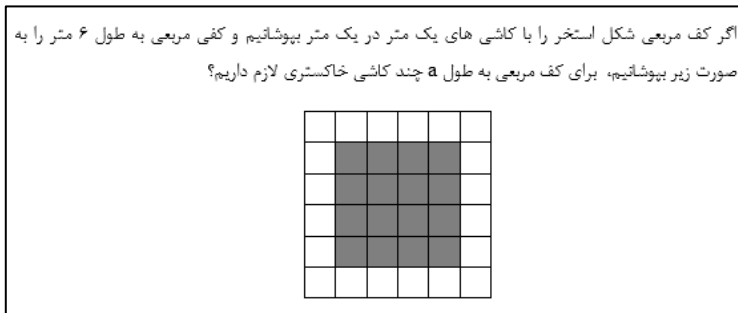
متغیر

برای اینکه دانش‌آموزان در استفاده از متغیر در تعمیم الگوهای شکلی که روابط تابعی برای آن‌ها نوشته می‌شود تسلط پیدا کنند، توجه به مولفه‌های متغیر در روابط تابعی یورسینی و تریگورس (۲۰۰۳) می‌تواند مفید باشد و در آموزش تعمیم الگوها به ویژه در دو متغیره‌ها بیشتر نیاز است که جایگاه متغیر وابسته و مستقل در ذهن دانش‌آموزان روشن باشد. در کتاب درسی جای مولفه‌های ۴ و ۵ (که در ادبیات تحقیق مطرح شده است) خالی است. به عنوان مثال (۵):

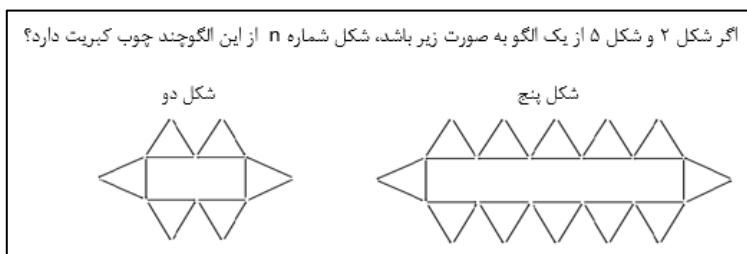
۱- الگوی شکلی برای $3n$ طراحی کنید. با دو برابر شدن n الگو چگونه تغییر می‌کند؟

۲- الگوی شکلی برای $n+2$ طراحی کنید؟ بین کدام مقادیر n الگو بین ۵۰ تا ۱۲۰ شکل دارد؟

ریورا (۲۰۱۳) استفاده از الگوهایی با جملات نامتوالی (مثلاً فقط جمله‌ی سوم و پنجم) و همچنین استفاده از الگوهای عام (که فقط یک جمله دارند) را یک راه مفید برای سوق دادن دانش‌آموزان به استفاده از متغیر در روابط تابعی می‌داند که از دست ورزی‌های بی‌معنا با اعداد استخراج شده از الگوها ممانعت می‌کند. مثال الگوی عام در شکل ۷ و الگوی نامتوالی در شکل ۸ آمده است:



شکل ۷. الگوی عام (شامل یک جمله) برگرفته از [۱۰].



شکل ۸. الگوی شکلی با جملات نامتوالی برگرفته از [۱۸].

با توجه به این که این تحقیق بخشی از یک تحقیق وسیع‌تر است فعالیت‌های طراحی و پیشنهاد شده در این تحقیق در چرخه‌های تدریس به کار گرفته شده‌اند که این چرخه‌ها در تحقیق افخمی و همکاران (۱۳۹۹) بیان شده است.

نتیجه گیری

الگوهای شکلی این قابلیت را دارند که دانش‌آموزان نوشتن روابط جبری و مدل‌سازی ریاضی را تمرین کنند [۱۰] و از طریق بازنمایی‌های محسوس مفهوم تابع، پیچیدگی و سختی این مفهوم بر آنان سهل گردد. چنانچه روبرو (۲۰۱۳) بیان می‌کند دانش‌آموزانی که تعمیم الگوها را کار کرده بودند بدون این که در توابع و مدل‌سازی آموزش دیده باشند قادر بودند به سوالات این حوزه پاسخ دهند. مفاهیم جبری جزو مفاهیمی است که برای آمادگی در موقعیت‌های شغلی از مفاهیم پایه محسوب می‌شود. ولیکن هنرجویان در این مفاهیم که توابع، توابع خطی و درجه دوم و کاربرد آن‌ها در محل معادلات و نامعادلات از جمله‌ی آن‌هاست، درک مطلوبی از خود نشان نمی‌دهند [۵]. بنابراین خلق موقعیت‌های آموزشی مطلوب در مقاطع قبل و استفاده از استراتژی‌های پداگوژیکی در حوزه مفاهیم ریاضی می‌تواند راهگشا باشد و هنر جویانی باتفکر تابعی تربیت نماید. از آنجا که الگوهای شکلی بازنمایی محسوسی از روابط تابعی هستند، می‌توانند در قابل درک ساختن مفهوم پرکاربرد تابع، انواع تابع خطی/غیرخطی و یک‌متغیره/دومتغیره در سال‌های مختلف تحصیل ابزار قدرتمندی محسوب شوند. دانش‌آموزان پایه‌ی هفتم در کتاب درسی ریاضی خود با فضای دو بعدی آشنا می‌شوند. دستگاه مختصات دکارتی دو بعدی را نیز می‌آموزند. قبل از یادگیری رسمی نیز فضای دو بعدی را تجربه کرده و آموخته‌اند. ولیکن در الگوهای شکلی دومتغیره نیاز هست تا با فضای سه‌بعدی آشنا شوند [۱۶]. برای آشنا شدن با فضاییسه‌بعدی کافیهست به جای تغییر دادن در یک متغیر، آن را در دو متغیر اعمال کنند و ساختار شناختی جدیدی نیاز ندارند [۱۵]. همچنین با توجه به این که در الگوهای شکلی دو متغیره متغیرهای مستقل و وابسته ضرورتاً باید تشخیص داده شوند، از این جهت مطرح کردن الگوهای دو متغیره از نظر یاددهی و یادگیری معنادار مفهوم متغیر و تابع، غنی‌تر می‌باشد. با توجه به تنظیم سوالات تعمیم الگوها با مشخصه‌های یکسان (مانند شکل مربع، پیوسته بودن، شباهت ظاهری مطابق با اصول گشتالت) و فقط متفاوت در تعداد متغیر و خطی/غیرخطی بودن، به نظر می‌رسد تعداد متغیر و خطی/غیرخطی بودن عامل تعیین‌کننده‌ای در موفقیت در تعمیم نباشد چرا که میزان موفقیت در تعمیم الگوی خطی یک متغیره بیشترین همبستگی را با الگوی دومتغیره‌ی دوخطی و الگوی یک متغیره‌ی دوخطی بیشترین همبستگی را با الگوی دو متغیره‌ی غیرخطی دارد. با توجه به داده‌های به دست آمده از نظر شباهت عملکرد دانش‌آموزان در الگوهای خطی و غیرخطی و همچنین یک متغیره و دو متغیره با توجه به پیشینه‌ی تحقیق و مطالعات تجربی محقق [۱] با در نظر گرفتن دو مفهوم پایه‌ای متغیر در رابطه‌ی تابعی و فضای R^3 ، پیشنهاداتی در جهت رفع مشکلات دانش‌آموزان در برخورد با الگوهای شکلی دومتغیره‌ی کلی مطرح شد و مسیر یاددهی و یادگیری این الگوها مشخص گردید.

تشکر و قدردانی

از مدیریت آموزش و پرورش شهرستان ملکان، مدیران مدارس دولتی و مدیر خانه ریاضیات شهرستان ملکان که در جمع‌آوری داده‌ها با محققین همکاری داشته‌اند، تشکر و قدردانی می‌گردد.

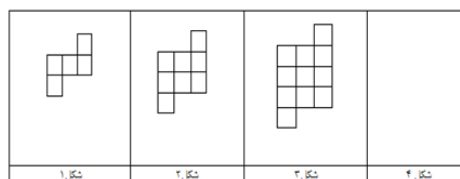
References

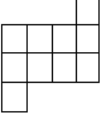
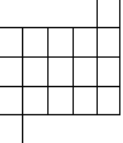
- [1] Afkhami, R, Asghary, N, and Medghalchi, A (2020). Enhancing functional thinking: Identifying the prior schemas of seventh grade students in generalization of two-variable figural patterns. *Tech. Edu. J.* 14(3): 707-722. [In Persian]. <https://doi.org/10.22061/jte.2019.4844.2127>
- [2] National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)(2019). *Executive Summary, Principles and Standards for School Mathematics*.
- [3] Khosroshahi, Gh.L. (2016). *Algebraization for Pre-schoolers with a focus on Associativity*. [Unpublished Ph.D. dissertation. shahid beheshti university, Tehran]. [in Persian].
- [4] Mahdi, R., & Barani, S. (2020). Analysis of the Position of Technical and Vocational Educations and Skill Training in Iran's Scientific Comprehensive Map. *Karafan Quarterly Scientific Journal*, 16(2), 15-32. https://karafan.tvu.ac.ir/article_105070_bda8f486bfa5ae8fb7559267cea04eb9.pdf.

- [5] Zeinivandneghad, F. (2019). Mathematics content framework in Iran's technical and vocational education. *Educational Innovations*, 18(1), 85-112. <https://doi.org/10.22034/jei.2019.88543>
- [6] Blanton, M.L. & Kaput, J.J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. *ZDM- international Reviews on mathematical education*, 37(1), 34-42. https://www.springer.com/cda/content/document/cda_downloaddocument/9783642177347-c2.pdf?SGWID=0-0-45-1088039-p174085659.
- [7] Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In J. Cai, & E. Knuth, Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives. *London, New York: Springer*. 303-322.
- [8] Markworth, K.A. (2010). *Growing and growing: promoting functional thinking with geometric growing patterns*. [published doctoral dissertation. University of north Carolina, Chapel Hill]. <https://cdr.lib.unc.edu/indexablecontent/uuid:78d8dd0e-ce9e-4fa5-82f8-a38a89cdf08>.
- [9] Dorobaf, M., & Modaressi Saryazdi, A. S. (2021). Investigating the effect of mathematics lesson in the manner of storytelling on students' academic achievement motivation. *Karafan Quarterly Scientific Journal*, 17(Special Issue), 263-277. <https://doi.org/10.48301/kssa.2021.128440>
- [10] Rivera, F. (2013). *Teaching and learning patterns in school mathematics: Psychological and pedagogical considerations*. Springer Science & Business Media. <https://www.springer.com/gp/book/9789400727113>.
- [11] Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. *Algebra in the elementary grade*. 133-163. https://www.researchgate.net/publication/291216132_Representational_thinking_as_a_framework_for_introducing_functions_in_the_elementary_curriculum
- [12] Asghari, N. (2014). Developing a model to enhance elementary teachers, ability to foster functional thinking and algebraic reasoning in elementary students. *Jornal of the theory and practice in curriculum*, 2(3), 141-162. [in Persian]. https://cstp.khu.ac.ir/browse.php?a_id=2114&sid=1&slc_lang=en.
- [13] Trigueros, M. & Ursini, S. (2003). First year undergraduates' difficulties in working with the concept of variable. *CBMS, Research in Collegiate Mathematics Education*, 12, 1-29. https://www.researchgate.net/publication/286183163_First-year_undergraduates'_difficulties_in_working_with_different_uses_of_variable
- [14] Zohrevand, Sh. (2013). *Students' Misconceptions about Concept of Variable in Algebra* [unpublished master thesis. Shahid Rajaei Teacher Training University. Tehran]. [In Persian].
- [15] Harel, G., & Tall, D. (1989). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 11 (1), 38-42. <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1991b-harel-flm.pdf>
- [16] Hashemi, N., Abu, M.s., Kashefi, H. & Rahimi, Kh. (2013). Generalization in the learning of mathematics. *The 2nd seminar on quality and affordable education. Malazia*. <http://eprints.utm.my/id/eprint/37764/>.
- [17] Chua, B. L. (2009). Features of generalising task: Help or hurdle to expressing generality? *Australian Mathematics Teacher*, 65(2), 18 – 24. https://www.researchgate.net/publication/261950576_Features_of_Generalising_Tasks_Help_or_Hurdle_to_Expressing_Generality.
- [18] Samson, D. A. (2011). *The Heuristic Significance of Enacted Visualisation*. [published Doctoral dissertation. Rhodes University, Grahamstown, South Africa]. <https://core.ac.uk/download/pdf/145054790.pdf>
- [19] Kullberg, A., Runesson, U., & Marton, F. (2017). What is made possible to learn when using the variation theory of learning in teaching mathematics? *ZDM- International Journal on Mathematics Education*. 49(4). <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0858-4>

پیوست ۱

۱- شکل ۴ را در برگه ی سوال بکشید .
۲- توضیح دهید شکل ۵ را چگونه می کشید؟
۳- شکل شماره چند، ۲۰ مربع دارد؟
۴- شکل ۷۵ چند مربع دارد؟
۵- شکل n چند مربع دارد؟
۶- شکل شماره چند، ۳۰۲ مربع دارد؟



۷- شکل ۴ را در برگه ی سوال بکشید . ۸- توضیح دهید شکل ۵ را چطور می کشید؟ ۹- شکل شماره چند، ۵۰ مربع دارد؟ ۱۰- شکل ۷۵ چند مربع دارد؟ ۱۱- شکل n چند مربع دارد؟ ۱۲- شکل شماره چند، ۹۶۲ مربع دارد؟				شکل ۱	شکل ۲	شکل ۳	شکل ۴
--	---	---	---	--------------	--------------	--------------	--------------

	ستون ۱	ستون ۲	ستون ۳	ستون ۴
ردیف ۱				
ردیف ۲				
ردیف ۳				؟
ردیف ۴		؟		؟

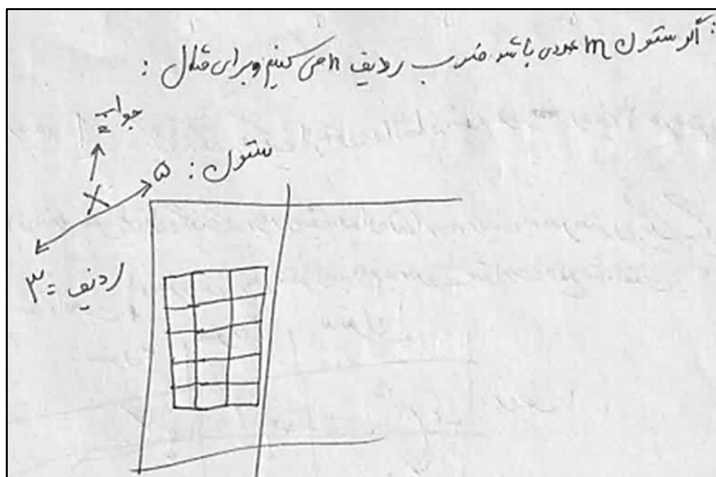
	ستون ۱	ستون ۲	ستون ۳	ستون ۴
ردیف ۱				
ردیف ۲				
ردیف ۳				؟
ردیف ۴		؟		؟

	ردیف ۱	ردیف ۲	ردیف ۳	ردیف ۴
ستون ۱				
ستون ۲				
ستون ۳				
ستون ۴				

$n \times 1$ ردیف ۱
 $n \times 2$ ردیف ۲
 $n \times 3$ ردیف ۳
 $n \times 4$ ردیف ۴
 $m \times 1$ ستون ۱
 $m \times 2$ ستون ۲
 $m \times 3$ ستون ۳
 $m \times 4$ ستون ۴

$n \Rightarrow$ در ستون همان عدد ردیف است
 $m \Rightarrow$ در ردیف همان عدد ستون است

شکل ۱



شکل ۲

۲۰	۱	۱	۲۴
۱۸+۱	۲۹+۲	۳۹+۳	۴۹+۴
۱۸+۳	۲۹+۴	۳۹+۵	۴۹+۶

شکل ۳

The image shows handwritten mathematical work. On the left, there is a division problem: $\frac{4}{3 \times 3}$ with a horizontal line above the 4 and a horizontal line below the 3s. Below this, there is a formula: $\frac{4}{12} \propto \frac{4}{12} = 4 - 2(3)$. To the right of this, there is a formula: $n + \frac{m}{n} = m$. Below this, there is a note: $16 - \text{درستون و}$.

شکل ۴