



Intelligent classification of polynomial curves with parametric coefficients

Mahdi Dehghani Darmian^{*1} 

¹Assistant Professor, Department of Basic Sciences, Technical and Vocational University (TVU), Tehran, Iran.

ARTICLE INFO

Article Type:

Original Research

Received: 28.09.2024

Revised: 18.11.2024

Accepted: 29.12.2024

Keyword:

Singular points

Gröbner Bases

Gröbner system

Gröbner systems

Parametric polynomial curves

Maple

GESGVWCGS algorithm

*Corresponding Author:

Mahdi Dehghani Darmian

Email:

mdehghanidarmian@tvu.ac.ir

m.dehghanidarmian@ipm.ir

ABSTRACT

This article explores parametric curves defined by polynomials with parametric coefficients. We introduce an automated classification method that utilizes computational algebra techniques and singular variety theory, focusing on various parameters and their singular points—where the derivative is zero or undefined. These singular points are crucial for identifying key curve features. In 2010, Dehghani classified cubic curves using the Montes DISPGB algorithm; in this paper, we apply the Dehghani GESGVWCGS algorithm to classify all families of parametric polynomial curves, including cubic ones. Our results extend previous research, enabling more complex analyses of higher-dimensional varieties and displaying parametric constraints more easily and structurally. We believe that integrating computational tools with singular variety theory will enhance the theory and applications of parametric curve studies in fields like computer graphics and architectural design. This method streamlines curve analysis and improves applicability. All computations are conducted using Maple 18, and the methodology is demonstrated with two families of polynomial curves featuring parametric coefficients.

EXTENDED ABSTRACT

Introduction

Parametric polynomial curves are widely used across scientific and engineering disciplines. In physics, they model particle motion in space, while in engineering, they describe object trajectories influenced by forces. Economists employ them to illustrate economic indicators over time, and in computer graphics, they are essential for creating realistic animations and modeling complex shapes. For instance, the position of a particle can be expressed through parametric equations that define its coordinates as functions of time, aiding in the calculation of velocity and acceleration vectors. The extensive use of parametric curves underscores their significance in theoretical and practical applications. A key area of interest for mathematicians is the study of singular points in these curves, which enhances our understanding of their geometric and topological properties. Using computational algebra and singular variety theory, we present an automated classification method for these curves, focusing on parameters and singular points where the derivative is zero or undefined. In 2010, Dehghani classified cubic curves using the Montes DISPG algorithm; here, we apply the Dehghani GESGVWCGS algorithm to intelligently classify all families of parametric polynomial curves, including cubic ones. This method streamlines the analysis of parametric curves, improves applications in singularity theory, and broadens the role of computational algebra in parametric system studies.

Methodology

The Gröbner system, a computer algebra technique, automates the classification of parametric polynomial curves in various fields such as physics, economics, computer graphics, coding, and cryptography. It employs the efficient GESGVWCGS algorithm to partition the parameter space into finite cells. As these equations are defined by specific parameters and variables, parametric Gröbner bases play a crucial role in solving them and mapping the parameter space. Gröbner bases, introduced in 1965 by Wolfgang Gröbner and later expanded by Weispfenning in 1992 for parametric cases, are powerful tools in computer algebra. Recent advancements, particularly Dehghani's 2024 GESGVWCGS algorithm, utilize parametric linear algebra techniques to effectively divide the parametric space.

Results and discussion

Gröbner systems find numerous applications in robotics, algebraic geometry, parametric linear algebra, biochemistry, biology, automatic theorem proving, and electrical networks. Specifically, we highlight their role in intelligently classifying all families of parametric polynomial curves. To classify parametric polynomial curves automatically, we need to create a polynomial ideal from the curve equation and its derivatives. For instance, consider the following parametric curve

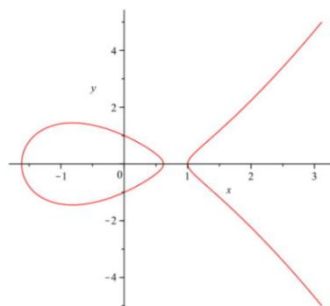


Figure 1: $y^2 - x^3 + 2x - 1 = 0$

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

which represents a general elliptic curve. The Weierstrass normal form is a standard way to express elliptic curves. To convert this cubic curve into Weierstrass form, first homogenize it by introducing a new variable (typically 'w') and then apply a series of coordinate transformations. This process includes completing the square and scaling the variables until we obtain the desired form $y^2 = x^3 + ax + b$.

This transformation is valuable for various applications, including exploring the properties of elliptic curves and their cryptographic uses. Now, using $f = y^2 - x^3 - ax - b$ and its derivatives, we form the following ideal:

$$F = \left\langle f, \frac{\partial(f)}{\partial(x)}, \frac{\partial(f)}{\partial(y)} \right\rangle \\ = \langle y^2 - x^3 - ax - b, -3x^2 - a, 2y \rangle$$

By utilizing the Maple implementation of the GESGVWCGS algorithm, a Gröbner system for F is computed, featuring 5 branches:

$$L = \{ \left[\begin{array}{l} [] \\ [a, b, 27b^2 + 4a^3] \\ [1] \end{array} \right], \\ \left[\begin{array}{l} [27b^2 + 4a^3] \\ [a, b] \\ [y - 2a^2 + 9xb] \end{array} \right], \\ \left[\begin{array}{l} [b] \\ [a] \\ [1] \end{array} \right], \left[\begin{array}{l} [a] \\ [b] \\ [1] \end{array} \right], \\ \left[\begin{array}{l} [b, a] \\ [] \\ [y, x^2] \end{array} \right] \}.$$

The output has five branches, with the first member of L being $(N_1, W_1, G_1) = ([] , [a, b, 27b^2 + 4a^3], [1])$. If we set $\Delta = 27b^2 + 4a^3$ then the minimal singular polynomial for F polynomials is $V(\Delta)$. Specifically, when $\Delta = 0$, the parametric polynomial curve $y^2 = x^3 + ax + b$ possesses a singular point, whereas when $\Delta \neq 0$, the curve lacks a singular point. We will illustrate this with three diagrams.

First, according to the conditions N_1 and W_1 , we set $a = -2$ and $b = 1$ (which satisfy N_1, W_1 , hence $\Delta \neq 0$). The curve diagram is as figure 1. The second triple of L is $(N_2, W_2, G_2) = ([27b^2 + 4a^3], [a, b], [y, 9xb - 2a^2])$. Since $G_2 = [y, -2a^2 + 9xb]$, we conclude that $y = 0$ and $x = \frac{2a^2}{9b}$. When $\Delta = 0$ and $a, b \neq 0$, the point $\left(\frac{2a^2}{9b}, 0\right)$ is a singular point of the curve (a double point). For $a = -3$ and $b = 2$, the point $(1, 0)$ becomes a singular point of the curve $y^2 = x^3 + ax + b$. The graph of this curve for these values is in Figure 2. The third and fourth members of L behave like the first, as $G_1 = G_3 = G_4 = [1]$. Examining the last member, $(N_5, W_5, G_5) = ([b, a], [], [y, x^2])$ which gives $G_5 = [y, x^2]$. This indicates that for $a = b = 0$ (which follows from $\Delta = 0$), the Weierstrass form of the elliptic curve has a singular point at $(0,0)$. This is illustrated in the left-hand diagram 3. It is worth noting that similar results were obtained using the DISPG algorithm in [26], whereas this article uses the efficient GESGVWCGS algorithm for classification.

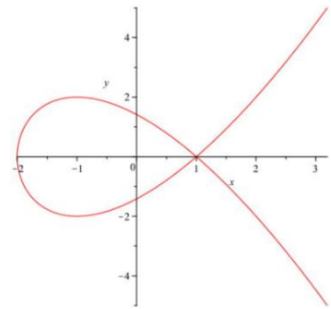
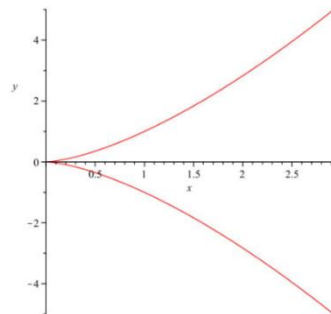


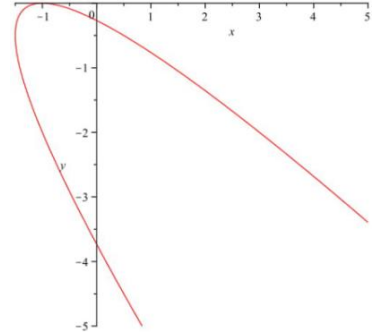
Figure 2: Nodal point of $y^2 - x^3 + 3x - 2 = 0$



Now, consider another parametric curve defined by

$$x^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0,$$

where x and y are variables and b, c, d, e , and f are parameters. We will compute the minimal singular variety of this curve for various parameter values, represented by the polynomial $g = x^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f$. We create the ideal linked to this curve: $F = \langle g, \frac{\partial(g)}{\partial(x)}, \frac{\partial(g)}{\partial(y)} \rangle = \langle x^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f, 2(x + cy + d), 2(by + cx + e) \rangle$.



$$\text{GESGVWCGS}(F, f \prec_{\text{lex}} e \prec_{\text{lex}} d \prec_{\text{lex}} c \prec_{\text{lex}} b, y \prec_{\text{lex}} x) =$$

$$L = \{[[], [cd - e, c^2f + bd^2 - bf - 2cde + e^2], [1]], \\ [[cd - e, c^2f + bd^2 - bf - 2cde + e^2], [c, cd - e], [cyd - ey + d^2 - f, -de + cf \\ + cdx - ex]], \\ [[c, bd^2 - bf + e^2], [d, e], [ey - d^2 + f, x + d]], \\ [[cd - e], [d^2 - f, -de + cf], [1]], \\ [[-ef + d^2e, -de + cf, cd - e], [d^2 - f], [1]], \\ [[d^2 - f, -de + cf, cd - e], [c, -c^2 + b], [y, x + d]], \\ [[e, d^2 - f, c], [b, d], [y, x + d]], \\ [[f, e, d, c], [b], [y, x]], \\ [[d^2 - f, -de + cf, cd - e, -c^2 + b], [c], [x + cy + d]], \\ [[e, d^2 - f, c, b], [d], [x + d]], \\ [[f, e, d, c, b], [], [x]]\}$$

We define the polynomial $\Delta = bd^2 - bf + c^2f - 2ecd + e^2$, which belongs to the set N_2 . So, $V(\Delta)$ represents the minimal singular; specifically, when $\Delta = 0$, the curve g has a singular point, while $\Delta \neq 0$ indicates no singular points.

This will be demonstrated by applying two diagrams;

For the first member of L , we set $b = 1, c = 1, d = 1, e = 2, f = 1$ (i.e., $\Delta \neq 0$). Substituting these values results in

the equation $x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 4y + 1 = 0$, shown in

Diagram 4, indicating no singular points. For the second triple of L , we consider $b = -1, c = 1, d = 1, e = 2, f = \frac{1}{2}$, resulting in the singular point $(x, y) = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

for the parametric polynomial curve $x^2 - y^2 + 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot x + 4 \cdot y + \frac{1}{2} = 0$, that depicted in Figure 5.

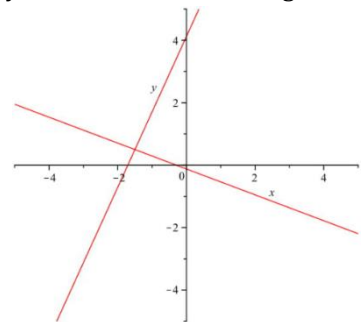


Figure 5: $x^2 - y^2 + 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot x + 4 \cdot y + \frac{1}{2} = 0$

Conclusion

Studying parametric curves, their singular points, and computational tools like the GESGVWCGS algorithm enhances our understanding and practical applications in various scientific fields. These techniques enable the analysis of complex geometric entities, fostering innovations in applying mathematics to real-world problems. For example, automatic classification of parametric curves and computational algebra tools like Gröbner systems provide valuable solutions in numerous scientific and engineering contexts. Parametric curves are crucial in engineering and basic sciences, representing intricate shapes and movements. They are utilized in physics, engineering, economics, coding, and computer graphics, aiding in analyzing particle motion and economic trends



رده‌بندی هوشمند منحنی‌های چندجمله‌ای با ضرایب پارامتری

مهدی دهقانی درمیان^{۱*}

۱ - استادیار، گروه علوم پایه، دانشگاه ملی مهارت، تهران ایران.

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی (کاربردی) دریافت مقاله: ۱۴۰۳/۰۷/۰۷ بازنگری مقاله: ۱۴۰۳/۰۸/۲۸ پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۱۰/۰۹ کلید واژگان: نقاط منفرد پایه‌های گرینر دستگاه گرینر منحنی‌های چندجمله‌ای پارامتری مپیل الگوریتم GESGVWCGS	در این مقاله به مطالعه منحنی‌هایی می‌پردازیم که به صورت چندجمله‌ای با ضرایب پارامتری نمایش داده می‌شوند. برای این منظور با کمک مفاهیم جبر محاسباتی و به عنوان کاربرد چندگونای منفرد، نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان یک منحنی پارامتری را بر اساس مقادیر پارامترهای مختلف و بر حسب نقاط منفرد (تکین) آن به طور خودکار طبقه‌بندی کرد. یک نقطه منفرد در جایی رخ می‌دهد که مشتق معادلات پارامتری صفر یا تعریف نشده باشد. این نقاط اغلب نمایانگر ویژگی‌های جالب منحنی هستند. نقاط منفرد برای طبقه‌بندی منحنی‌های پارامتری مفید هستند زیرا به شناسایی و مشخص کردن انواع مختلف منحنی‌ها کمک می‌کنند. در سال ۲۰۱۰ دهقانی این کاربرد را با کمک الگوریتم DISPGB برای رده‌بندی خم‌های مکعبی بیان کرد و ما در این مقاله از الگوریتم GESGVWCGS برای رده‌بندی هوشمند همه‌ی خانواده منحنی‌های پارامتری استفاده می‌کنیم و به عنوان مثال خم‌های مکعبی و یک خانواده خم پارامتری دیگر را هوشمندانه رده‌بندی می‌کنیم. این طبقه‌بندی خودکار نه تنها تحلیل منحنی‌های پارامتری را ساده می‌کند، بلکه زمینه را برای کاربردهای بیشتر در تئوری تکینگی فراهم کرده و تطبیق پذیری جبر محاسباتی را در مطالعه سیستم‌های پارامتری افزایش می‌دهد. تمام محاسبات با استفاده از مپیل ۱۸ انجام می‌شود و روش بیان شده با دو خانواده از منحنی‌های چندجمله‌ای دارای ضرایب پارامتری نشان داده شده است.

*نویسنده مسئول: مهدی دهقانی

درمیان

پست الکترونیکی:

mdehghanidarmian@tvu.ac.ir

m.dehghanidarmian@ipm.ir



۱. مقدمه:

اشتراک ایده‌آل‌های چندجمله‌ای یک مفهوم اساسی در هندسه جبری و جبر جابجایی است که کاربردهای زیادی در علوم محاسباتی و مهندسی دارد. با توجه به دو ایده‌آل چندجمله‌ای I و J اشتراک آنها به عنوان مجموعه‌ای از همه چندجمله‌ای‌ها تعریف می‌شود که به هر دو ایده‌آل I و J تعلق دارند. هنگام در نظر گرفتن اشتراک دو ایده‌آل چندجمله‌ای I و J یافتن پایه‌ی گربرنر برای اشتراک می‌تواند به ساده کردن محاسبات و تجزیه و تحلیل ویژگی‌های ایده‌آل‌ها کمک کند. منحنی‌های پارامتری کاربردهای گسترده‌ای در رشته‌های مختلف علوم پایه و مهندسی دارند. در فیزیک، از آنها برای مدل سازی حرکت ذرات در فضا استفاده می‌شود، در حالی که در مهندسی، می‌توانند مسیر یک جسم متحرک را تحت تأثیر نیروها توصیف کنند. اقتصاددانان از منحنی‌های پارامتری برای نشان دادن شاخص‌های اقتصادی در طول زمان استفاده می‌کنند و در گرافیک کامپیوتری، برای ایجاد انیمیشن‌های واقعی و مدل سازی اشکال پیچیده بسیار مهم هستند. به عنوان مثال، موقعیت یک ذره در حال حرکت در فضا را می‌توان با معادلات پارامتری توصیف کرد که مختصات آن را به عنوان تابعی از زمان تعریف می‌کند و محاسبه بردارهای سرعت و شتاب را در هر لحظه تسهیل می‌کند. کاربرد گسترده منحنی‌های پارامتری اهمیت آنها را در هر دو زمینه نظری و عملی برجسته می‌کند. یکی از زمینه‌های نظری مورد توجه ریاضیدانان که در کاربرد بسیار با اهمیت است مطالعه نقاط منفرد (تکین) منحنی‌های چندجمله‌ای پارامتری می‌باشد. مطالعه نقاط منفرد نه تنها درک ما از خواص هندسی منحنی‌های پارامتری را افزایش می‌دهد، بلکه کاوش عمیق‌تری از ویژگی‌های توپولوژیکی آنها را نیز ممکن می‌سازد. با استفاده از روش‌های محاسباتی، مانند الگوریتم GESGVWCGS در این مقاله، می‌توانیم به طور سیستماتیک این نقاط تکین را در طیفی از مقادیر پارامتر تجزیه و تحلیل کنیم. کارایی الگوریتم GESGVWCGS به ویژه در انجام محاسبات پیچیده مرتبط با طبقه‌بندی انواع نقاط منفرد قابل توجه است. این الگوریتم علاوه بر استفاده از پایه‌های گربرنر، از تکنیک‌های جبرخطی پارامتری استفاده کرده و امکان کاهش موثر معادلات پارامتری را فراهم می‌نماید. این کاهش، شناسایی نقاط منفرد را ساده می‌کند، که سپس می‌توان آنها را به چندین نوع دسته بندی کرد که هر دسته بینش‌های ارزشمندی را در مورد رفتار و شکل منحنی در فضای پارامتر ارائه می‌دهد. علاوه بر این، فرآیند طبقه‌بندی خودکار و سیستماتیک بازخورد قوی در مورد چگونگی تأثیر پارامترهای مختلف بر ماهیت تکینگی‌ها ارائه می‌دهد. به عنوان مثال، تغییر در مقادیر پارامتر می‌تواند منجر به تغییرات چشمگیر در ساختار منحنی شود. بنابراین، درک این حساسیت برای برنامه‌های کاربردی در گرافیک کامپیوتری، رباتیک، و حتی در زمینه‌های زیست‌شناسی و اقتصاد که در آن منحنی‌ها روابط مهم را نشان می‌دهند، بسیار مهم است. این طبقه بندی خودکار نه تنها تحلیل منحنی‌های پارامتری را ساده می‌کند، بلکه زمینه را برای کاربردهای بیشتر در تئوری تکینگی و تحلیل ابعادی فراهم می‌نماید. پروژه‌های آتی ممکن است شامل یکپارچه‌سازی تکنیک‌های یادگیری ماشین برای پیش‌بینی رفتارهای تکینگی ممکن بر اساس داده‌های قبلی باشد، و تطبیق پذیری جبر محاسباتی را در مطالعه سیستم‌های پویا افزایش دهد.

برای رده‌بندی خودکار خم‌های پارامتری در ابتدا باید به کمک ضابطه خم و مشتق‌های آن یک ایده‌آل چندجمله‌ای تشکیل دهیم. از آنجایی که ایده‌آل حاصل به برخی پارامترها و متغیرها بستگی دارد، استفاده از پایه‌های گربنر^۱ و پایه‌های گربنر پارامتری برای حل این معادلات با هدف یافتن همه راه‌های ممکن برای رسیدن به آن موقعیت ثابت، مفید است. پایه‌های گربنر نوع خاصی از مجموعه مولد یک ایده‌آل چندجمله‌ای است که ابزار قدرتمندی در جبر محاسباتی محسوب می‌شود. پایه‌های گربنر در سال ۱۹۶۵ همراه با یک الگوریتم (الگوریتم بوخبرگر) برای محاسبه آنها توسط برونو بوخبرگر^۲ در رساله دکترایش [۱] معرفی شد. او آنها را به افتخار استاد راهنمایش (ولفگانگ گربنر^۳) پایه گربنر نام‌گذاری کرد. سپس، او در [۲] دو معیار را برای بهبود عملکرد الگوریتم خود پیشنهاد کرد. در سال ۱۹۸۳، لازارد^۴ الگوریتمی را برای محاسبه پایه‌های گربنر با استفاده از تکنیک‌های جبر خطی [۳] توصیف کرد. بعداً، فوژر^۵ دو الگوریتم معروف خود برای محاسبه پایه‌های گربنر ارائه کرد (مراجع [۴، ۵]) را مطالعه کنید). از آنجایی که مطالعه ما بر پایه‌های گربنر پارامتری، مشهور به دستگاه گربنر^۶، متمرکز است به طور خلاصه، تاریخچه موجود در مورد این موضوع را مرور می‌کنیم. مفهوم دستگاه‌های گربنر و همچنین اولین الگوریتم برای محاسبه آنها برای اولین بار توسط وایزفنینگ^۷ در سال ۱۹۹۲ در [۶] معرفی شد. در این سال‌ها، مطالعات موثر و نتایج بسیاری در محاسبات سیستم‌های گربنر به‌دست آمده است [۷-۲۰] که نشان از اهمیت بسیار این مفهوم دارد. در نهایت دهقانی الگوریتم کارامد خود GESGVWCGS را در [۸] معرفی کرد که با استفاده از تکنیک‌های جبر خطی پارامتری به افزایش فضای پارامتری می‌پردازد.

سیستم‌های گربنر کاربردهای متعددی در ریاضیات و سایر علوم دارند. به طور خاص، می‌توان به هندسه جبری [۲۳-۲۸]، جبر خطی پارامتری [۱۴، ۹، ۷]، بیوشیمی و بیولوژی [۲۶، ۲۵]، اثبات خودکار برخی قضایای هندسه [۱۴، ۲۰، ۲۳، ۲۶، ۲۷]، شبکه‌های الکتریکی [۲۹] و غیره اشاره کرد. برای رسیدن به هدف اصلی این مقاله به بیان مفهوم پایه گربنر و دستگاه گربنر می‌پردازیم.

پایه‌های گربنر و دستگاه گربنر

مفهوم پایه‌های گربنر و اولین الگوریتم محاسبه‌ی آنها در رساله‌ی دکترای برونو بوخبرگر تحت راهنمایی ولفگانگ گربنر در سال ۱۹۶۵ معرفی شدند [۱]. در واقع هدف بوخبرگر یافتن نمایش مناسبی برای فضای خارج قسمتی متناظر با یک ایده‌آل چندجمله‌ای از بعد صفر بود. این نمایش مناسب، زمینه ساز معرفی پایه‌ی استاندارد شد

^۱ Gröbner bases

^۲ Bruno Buchberger

^۳ Wolfgang Gröbner

^۴ Lazard

^۵ Faugère

^۶ Gröbner system

^۷ Weispfenning

که بوخبرگر بعدها به افتخار استاد راهنمایش آن را پایه‌ی گرینر نامید. الگوریتم بوخبرگر^۱ از پیچیدگی محاسبات بالایی برخوردار بود. وی توانست در سال ۱۹۷۹ با ارائه‌ی دو محک، الگوریتم خود را قدرتمندتر و سریعتر نماید [۲]. دانیل لازارد در سال ۱۹۸۳ در [۳] با استفاده از جبرخطی توانست محاسبه‌ی پایه‌ی گرینر را بهبود بخشد که این خود نقطه‌ی عطفی در زمینه‌ی بهبود محاسبه‌ی پایه‌ی گرینر است. در نهایت فوژر دو الگوریتم مشهور خود یعنی F_+ و F_- را ارائه کرد [۴، ۵] که الگوریتم F_- سریع‌ترین الگوریتم محاسبه‌ی پایه‌ی گرینر تاکنون است. در ادامه این پایه‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. برای این منظور در ابتدا حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های چند متغیره را معرفی و سپس یک ترتیب تک جمله‌ای را تعریف می‌کنیم. یک تک جمله‌ای بر حسب متغیرهای $x_1, \dots, x_n$ حاصل ضربی از متغیرهای توان‌دار به شکل $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ است به قسمی که $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ برداری از اعداد صحیح نامنفی باشد. اگر بردار $\alpha = (0, \dots, 0)$ آنگاه $x^\alpha = 1$ ، همچنین درجه‌ی x^α را با نماد $|\alpha|$ نمایش داده و به صورت $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ تعریف می‌کنیم. فرض کنیم $\mathbb{K}$ یک میدان باشد. هر چندجمله‌ای f بر حسب متغیرهای $x_1, \dots, x_n$ ترکیب خطی تعدادی متناهی از تک جمله‌ای‌ها با ضرایب در $\mathbb{K}$ است که به شکل $f = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha x^\alpha$ می‌باشد و در آن $A \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ زیر مجموعه‌ای متناهی است و $a_\alpha \in \mathbb{K}$ ها ضرایب تک جمله‌ای‌های x^α در f هستند. همچنین، درجه‌ی چندجمله‌ای f را با نماد $\deg(f)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\deg(f) = \max\{|\alpha| \mid a_\alpha \neq 0, \alpha \in A\}$$

مجموعه متشکل از همه‌ی چندجمله‌ای‌ها بر حسب متغیرهای $x_1, \dots, x_n$ با ضرایب در $\mathbb{K}$ به همراه دو عمل جمع و ضرب چندجمله‌ای‌ها تشکیل حلقه‌ای می‌دهند که به حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های چند متغیره مرسوم است و با نماد $\mathfrak{R} = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ نمایش داده می‌شود. برخلاف حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های یک متغیره که درجه‌ی تک جمله‌ای‌ها نقش تعیین کننده‌ای در مقایسه‌ی آن‌ها دارد، در حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های چند متغیره نیاز به تعریف نوعی ترتیب داریم: یک ترتیب کلی $<$ روی $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ را یک ترتیب تک جمله‌ای گوئیم^۲ هرگاه به ازای هر $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$:

$$1. \text{ اگر } \alpha < \beta \text{ آنگاه } \alpha + \gamma < \beta + \gamma$$

$$2. \text{ ترتیب } < \text{ روی } \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \text{ خوش ترتیب باشد.}$$

فرض کنیم $\mathbb{M}(\mathfrak{R})$ مجموعه‌ی تمام تک جمله‌ای‌های حلقه‌ی $\mathfrak{R}$ باشد. با استفاده از تناظر یک به یک زیر یک ترتیب تک جمله‌ای روی $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ به یک ترتیب تک جمله‌ای روی $\mathfrak{R}$ تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(\mathfrak{R}) &\rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \\ x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} &\rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \end{aligned}$$

^۱ Buchberger's algorithm

^۲ Monomial order

با توجه به این تناظر، به‌ازای دو تک‌جمله‌ای $x^\alpha, x^\beta \in \mathfrak{R}$ اگر $a < \beta$ آنگاه تعریف می‌کنیم $x^\alpha < x^\beta$ از مهم‌ترین ترتیب‌های تک‌جمله‌ای می‌توان به ترتیب الفبایی^۱ اشاره کرد که در آن گوییم $\alpha <_{lex} \beta$ هرگاه اولین مؤلفه‌ی ناصفر سمت چپ $\alpha - \beta$ مثبت باشد. فرض کنید $\mathfrak{R} = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ و $<$ یک ترتیب تک‌جمله‌ای روی $\mathfrak{R}$ باشد. چندجمله‌ای $f = a_\alpha x^\alpha + \dots + a_\gamma x^\gamma$ را که در آن $a_\alpha \neq 0$ و $x^\gamma < \dots < x^\alpha$ در نظر می‌گیریم. منظور از تک‌جمله‌ای پیشرو^۲، ضریب پیشرو^۳ و جمله‌ی پیشروی^۴ f نسبت به $<$ به ترتیب a_α, x^γ و $a_\alpha x^\alpha$ است که با نمادهای $LT_{<}(f), LM_{<}(f)$ و $LC_{<}(f)$ نمایش داده می‌شود. همچنین ایده‌آل $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ را ایده‌آلی تک‌جمله‌ای نامیم هرگاه توسط یک مجموعه (متناهی یا نامتناهی) از تک‌جمله‌ای‌ها تولید شود. فرض کنیم $\mathfrak{R} = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ ایده‌آلی در حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها و $<$ ترتیب تک‌جمله‌ای روی $\mathfrak{R}$ باشد. در این صورت ایده‌آل پیشروی^۵ I را نسبت به $<$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$LT_{<}(I) = \langle LT_{<}(f) \mid f \in I \rangle$$

همان‌طور که مشخص است $LT_{<}(I)$ ایده‌آلی تک‌جمله‌ای است. در سال ۱۹۱۳ دیکسون^۶ ثابت کرد که هر ایده‌آل تک‌جمله‌ای دارای یک مجموعه مولد متناهی است (لم دیکسون^۷). پس چندجمله‌ای‌های $g_1, \dots, g_k \in I$ موجودند به‌قسمی که

$$LT_{<}(I) = \langle LT_{<}(g_1), \dots, LT_{<}(g_k) \rangle$$

به مجموعه‌ی ذکر شده یعنی $G = \{g_1, \dots, g_k\} \subset I$ یک پایه‌ی گربر I نسبت به $<$ می‌گوییم. یکی از مهم‌ترین کاربردهای پایه‌های گربر حل دستگاه‌های چندجمله‌ای در $\mathfrak{R} = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ می‌باشد که به اختصار به کمک یک مثال توضیح می‌دهیم.

فرض کنیم $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ ایده‌آلی در $\mathfrak{R} = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ باشد. منظور از چندگونای^۸ ایده‌آل I که آن‌را با $V(I)$ یا $V(f_1, \dots, f_s)$ نمایش می‌دهیم زیرمجموعه‌ی زیر از $\mathbb{K}^n$ است:

$$V(I) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \mid f_i(a_1, \dots, a_n) = 0, \forall i = 1, \dots, s\}$$

فرض کنیم G پایه‌ی گربر ایده‌آل I نسبت به یک ترتیب تک‌جمله‌ای باشد. در این صورت

$$V(I) = \emptyset \iff 1 \in G$$

به کمک این رابطه دو شرطی می‌توانیم به این سؤال پاسخ دهیم که آیا یک دستگاه چندجمله‌ای دارای جواب هست یا خیر. در صورت مثبت بودن پاسخ، به‌وسیله پایه گربر می‌توانیم جواب‌های دستگاه چندجمله‌ای را بیابیم. برای جزییات بیشتر به [۲۲، ۲۸] مراجعه نمایید.

^۱ Lexicographic order

^۲ Leading monomial

^۳ Leading coefficient

^۴ Leading term

^۵ Leading ideal

^۶ Dickson

^۷ Dickson's lemma

^۸ Variety

تا کنون پایه‌ی گرینر ایده‌آل I در حلقه‌ی $\mathfrak{R} = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ را نسبت به یک ترتیب تک‌جمله‌ای مطالعه کردیم که در آن ضرایب چندجمله‌ای‌ها در میدان دلخواه $\mathbb{K}$ قرار داشتند. در ادامه قصد داریم به مطالعه‌ی ایده‌آل‌های چندجمله‌ای پردازیم که در آن ضرایب چندجمله‌ای‌ها خود چندجمله‌ای‌هایی بر حسب تعدادی پارامتر می‌باشند سپس پایه‌ی گرینر این گونه ایده‌آل‌ها را معرفی و محاسبه می‌کنیم که به پایه‌ی گرینر پارامتری مشهورند و با توجه به ساختاری که دارند دستگاه گرینر نامیده می‌شوند. این مفهوم برای اولین بار در سال ۱۹۹۲ توسط وایزفنینگ در [۶] معرفی شد. وی در این مقاله اولین الگوریتم محاسبه‌ی دستگاه گرینر را ارائه کرد. در سال ۱۹۹۷ کالک برنر^۱ پایایی پایه‌های گرینر تحت تاثیر یک هم‌ریختی خاص به نام تخصیص^۲ را مورد مطالعه قرار داد که سال‌ها بعد زمینه‌ی پیدایش الگوریتم‌های سریع‌تر برای محاسبه‌ی این دو مفهوم را فراهم کرد. در سال ۲۰۰۲ مونتس^۳ در [۱۶] با استفاده از ایده‌ی طراحی الگوریتم وایزفنینگ [۶]، اولین الگوریتم سریع و کاربردی محاسبه‌ی دستگاه گرینر را ارائه کرد (همچنین [۱۱] را مشاهده کنید). یک سال بعد وایزفنینگ در [۲۰] پایه‌ی گرینر فراگیر متعارف را معرفی نمود. در سال ۲۰۰۶ سوزوکی^۴ و ساتو^۵ در [۱۹] با استفاده از نتایج بسیار مهم و مفید کالک برنر توانستند شیوه‌ای جدید برای محاسبه‌ی دستگاه گرینر و پایه‌ی گرینر فراگیر ارائه کنند. در سال ۲۰۱۰ کاپور^۶ و همکارانش در [۱۵] با استفاده از الگوریتم ساتو و سوزوکی و همچنین ایده‌های وایزفنینگ در [۶] توانستند سریع‌ترین الگوریتم محاسبه‌ی دستگاه گرینر را طراحی کنند.

سرانجام دهقانی در [۸] الگوریتم کارآمد خود GESGVWCGS را معرفی کرد که با استفاده از تکنیک‌های جبرخطی پارامتری به افراز فضای پارامتری می‌پردازد. در ادامه پس از بیان مقدمات، مفهوم دستگاه گرینر را معرفی می‌کنیم.

فرض کنیم $S = \mathbb{K}[a][x]$ حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های پارامتری باشد که در آن $x = x_1, \dots, x_n$ دنباله‌ای از متغیرها و $a = a_1, \dots, a_m$ دنباله‌ای از پارامترها است. هر تک‌جمله‌ای در S به شکل $(\prod a_i)^{\delta} (\prod x_j)^{\gamma}$ است که در آن $\delta \in \mathbb{N}^m$ و $\gamma \in \mathbb{N}^n$ و برای سادگی به صورت $a^{\delta} x^{\gamma}$ نوشته می‌شود. برای مقایسه‌ی تک‌جمله‌ای‌های موجود در S نیاز به معرفی یک ترتیب تک‌جمله‌ای است: اگر $x <_x$ یک ترتیب تک‌جمله‌ای روی متغیرها و $a <_a$ یک ترتیب تک‌جمله‌ای روی پارامترها باشد آنگاه ترتیب تک‌جمله‌ای $x, a <_{x,a}$ عبارتست از

$$a^{\delta} <_a a^{\beta} \text{ و } x^{\gamma} = x^{\alpha} \text{ یا } x^{\gamma} <_x x^{\alpha} \text{ اگر } x^{\gamma} a^{\delta} <_{x,a} x^{\alpha} a^{\beta}$$

که در آن $\delta, \beta \in \mathbb{N}^m$ و $\alpha \in \mathbb{N}^n$

^۱ Kalkbrener^۲ Specialization^۳ Montes^۴ Suzuki^۵ Sato^۶ Kapur

تعریف ۳. فرض کنیم $F, G_i \subset S$ و $(N_i, W_i) \subset \mathbb{K}[a] \times \mathbb{K}[a]$ به‌ازای $i = 1, \dots, l$ مجموعه‌ی سه-تایی‌های $\mathcal{G} = \{(N_i, W_i, G_i)\}_{i=1}^l$ یک دستگاه گرینر ایده‌آل $\langle f \rangle$ روی $\overline{\mathbb{K}}^m$ نسبت به ترتیب تک-جمله‌ای $\prec_{x,a}$ نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای هر i داشته باشیم:

▪ مجموعه‌ی $\sigma(G_i) \subset \overline{\mathbb{K}}[x]$ یک پایه گرینر $\langle \sigma(F) \rangle$ نسبت به $\prec_x$ باشد به‌قسمی که در آن هم‌ریختی $\sigma : \mathbb{K}[a] \rightarrow \overline{\mathbb{K}}$ تخصیص دلخواهی است که در (N_i, W_i) صدق می‌کند.

$$\bigcup_{i=1}^l \mathbb{V}(N_i) \setminus \mathbb{V}(W_i) = \mathbb{A} \quad \blacksquare$$

اگر $\mathbb{A} = \overline{\mathbb{K}}^m$ آنگاه به‌صورت خلاصه $\mathcal{G}$ را یک دستگاه گرینر $\langle F \rangle$ می‌نامیم. به هر یک از سه‌تایی‌های (N_i, W_i, G_i) در $\mathcal{G}$ یک شاخه‌ی دستگاه گرینر می‌گوییم. با توجه به شرط دوم تعریف بالا، N_i را مجموعه‌ی شرایط صفر^۱ و W_i را مجموعه‌ی شرایط ناصفر^۲ می‌نامیم. همچنین زوج (N_i, W_i) را زوج سازگار^۳ گوییم هرگاه $\mathbb{V}(N_i) \setminus \mathbb{V}(W_i) \neq \emptyset$ و در غیر این‌صورت آن را ناسازگار می‌نامیم که از دستگاه گرینر قابل حذف می‌باشند. در ادامه مثالی از دستگاه گرینر یک ایده‌آل را بیان می‌کنیم که با الگوریتم GESGVWCGS که در میپل اجرا کرده‌ایم محاسبه شده است.

در ادامه به‌طور مختصر ساختار الگوریتم DISPGB را که در سال ۲۰۰۲ توسط مونتس در [۱۶] ارائه شده است شرح می‌دهیم و پس از آن مثالی را با کمک این الگوریتم محاسبه می‌کنیم. هدف این الگوریتم محاسبه‌ی دستگاه گرینر یک ایده‌آل $F \subset S = \mathbb{K}[a][x]$ است که ساختار درختی دودویی دارد. در هر رأس v از این درخت سه‌تایی‌های $T_v = (N_v, W_v, G_v)$ ذخیره می‌شود که در آن

۱. دوتایی $(N_v, W_v) \subset \mathbb{K}[a] \times \mathbb{K}[a]$ بیانگر زوج سازگاریست که مشخص‌کننده‌ی حوزه‌ی تعریف تخصیص‌ها است.

۲. مجموعه‌ی $G_v \subset \mathbb{K}[a][x]$ یک مجموعه از چندجمله‌ای‌هاست به‌قسمی که $\sigma(G_v)$ پایه‌ای برای ایده‌آل $\langle \sigma(F) \rangle$ است به‌ازای هر σ که در (N_v, W_v) صدق کند.

الگوریتم DISPGB با شروع از رأس $([], [], F)$ شروع به کار می‌کند که طبق توضیحات بالا یعنی در ابتدا برای محاسبه‌ی دستگاه گرینر F ، هیچ محدودیتی روی پارامترها وجود ندارد و مجموعه شرایط صفر و ناصفر تهی هستند. هنگامی الگوریتم پایان می‌پذیرد که تمام شاخه‌های این درخت به رأس پایانی برسند (v را رأس پایانی نامیم هرگاه در سه‌تایی متناظر با آن یعنی (N_v, W_v, G_v) مجموعه‌ی $\sigma(G_v)$ یک پایه‌ی گرینر ایده‌آل $\langle \sigma(F) \rangle$ باشد به‌ازای هر تخصیص σ که در (N_v, W_v) صدق کند. الگوریتم DISPGB از دو نوع زیر الگوریتم زیر استفاده می‌کند:

۱- الگوریتم‌های شرطی که شامل دو زیر الگوریتم NEWCOND و CONDPGB می‌شود.

۲- الگوریتم‌های کنترلی که عبارتند از الگوریتم BRANCH و الگوریتم NEWVERTEX.

^۱ Null

^۲ Not null

^۳ Consistent pair

وظیفه‌ی هر یک از این زیرالگوریتم‌ها به شرح زیر است:

- الگوریتم NEWCOND: ورودی این الگوریتم چندجمله‌ای $f \in S$ و زوج سازگار $(N, W) \subset \mathbb{K}[a] \times \mathbb{K}[a]$ است. وظیفه‌ی این الگوریتم مشخص کردن تکلیف $LC_X(f)$ نسبت به (N, W) است. در واقع این الگوریتم مشخص می‌کند که آیا $LC_X(f) = 0$ یا $LC_X(f) \neq 0$ یا هنوز تکلیف صفر یا ناصفر بودن $LC_X(f)$ نسبت به (N, W) معلوم نیست. اگر صفر یا ناصفر بودن $LC_X(f)$ نسبت به (N, W) معلوم نباشد، آنگاه الگوریتم NEWCOND آن را به الگوریتم NEWVERTEX تحویل می‌دهد تا رأسی جدید در درخت محاسبات ایجاد شود.
 - الگوریتم CONDPGB: فرض کنیم سه‌تایی (N_v, W_v, G_v) متناظر با رأس v از درخت دودویی باشد. اگر هیچ ضریب پیشروی نامشخصی نسبت به (N_v, W_v) در G_v وجود نداشته باشد، آنگاه الگوریتم CONDPGB فراخوانده می‌شود تا بررسی کند که آیا $\sigma(G_v)$ یک پایه‌ای گرینر ایده‌آل $\langle \sigma(F) \rangle$ نسبت به (N_v, W_v) است یا خیر این الگوریتم شبیه الگوریتم بوخبرگر عمل می‌کند یعنی به‌ازای هر $g_i, g_j \in G_v$ به محاسبه‌ی $Spoly(g_i, g_j)$ می‌پردازد. اگر صفر یا ناصفر بودن ضریب پیشروی یک S - چندجمله‌ای معلوم نباشد، آنگاه الگوریتم BRANCH فراخوانده می‌شود تا عملیات دوشاخه‌سازی مسیر محاسبات (ضریب پیشرو مساوی صفر و مخالف صفر) انجام شود.
 - الگوریتم BRANCH: وظیفه‌ی این الگوریتم ایجاد دو شاخه‌ی صفر و ناصفر به‌ازای هر ضریب پیشروی نامعلوم است. عملیات شاخه زنی هنگامی انجام می‌شود که در محاسبه‌ی پایه‌ی گرینر در الگوریتم CONDPGB یک پارامتر جدید که صفر یا ناصفر بودنش معلوم نیست پدیدار شود.
 - الگوریتم NEWVERTEX: اگر چندجمله‌ای f در مسیر محاسبات موجود باشد که صفر یا ناصفر بودن $LC_X(f)$ نامشخص باشد در این صورت الگوریتم NEWVERTEX رأسی جدید متناظر با این ضریب پیشرو ایجاد می‌کند که قاعدتاً در مرحله‌ی بعد توسط الگوریتم BRANCH به شاخه‌ی صفر و ناصفر تقسیم حالت می‌شود.
- در ادامه با مثالی ساده الگوریتم DISPGB مونتنس را شرح می‌دهیم.

مثال ۴. فرض کنیم a پارامتر و x, y متغیر هستند و

$$F = \{(a-1)x + y^2, ay + a\} \subset \mathbb{K}[a][x, y]$$

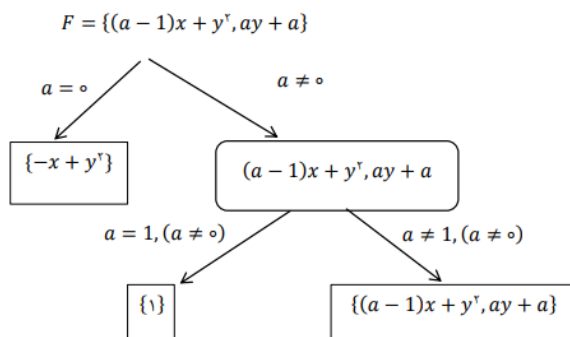
یک ایده‌آل با ضرایب پارامتری باشد. می‌خواهیم با کمک الگوریتم مونتنس یک دستگاه گرینر برای F محاسبه کنیم. در ابتدا مجموعه‌ی شرایط صفر و ناصفر تهی می‌باشند یعنی $N = [], W = []$. چون صفر یا ناصفر بودن $LC_X(f_1) = a$ معلوم نیست پس الگوریتم NEWCOND پارامتر a را به الگوریتم NEWVERTEX تحویل می‌دهد و سپس دو شاخه‌ی $a = 0$ و $a \neq 0$ توسط الگوریتم BRANCH ایجاد می‌شود. این بدان معناست که یکبار پارامتر a به $N = []$ اضافه می‌شود و یکبار به $W = []$.

- اگر $a = 0$ ، آنگاه $\{-x + y^2\} = F|_{\{a=0\}}$ که همواره یک پایه‌ی گرینر است.
- اگر $a \neq 0$ در این صورت نیاز به بررسی پارامتر $a - 1 = LC_X(f_2)$ است. پس تحت فرض $a \neq 0$ دوشاخه‌ی $a - 1 = 0$ و $a - 1 \neq 0$ ایجاد می‌شود. این بدان معناست که یکبار پارامتر $a - 1$ به

$N = []$ اضافه می‌شود و یکبار به $W = [a]$.

- اگر $a = 1$ ، آنگاه $F|_{\{a=1\}} = \{y + 1, y^2\}$ که پس از فراخوانی الگوریتم CONDPGB مشخص می‌شود که مجموعه‌ی $\{1\}$ یک پایه‌ی گرینر ایده‌آل $\langle \sigma(F) \rangle$ نسبت به $([a-1], [a])$ است.
- اگر $a \neq 1$ ، در این صورت هر دو ضریب پیشروی f_1, f_2 مخالف صفر هستند. پس از فراخوانی الگوریتم CONDPGB و با کمک محک اول بوخبرگر مشخص می‌شود که $\{ay + a, (a-1)x + y^2\}$ یک پایه‌ی گرینر ایده‌آل $\langle \sigma(F) \rangle$ نسبت به $([], [a, a-1])$ است.

نمودار درختی دستگاه گرینر $\langle F \rangle$ نسبت به ترتیب تک‌جمله‌ای $x \leq_{lex} y \leq_{lex} a$ عبارتست از:



شکل ۱: نمودار درختی دستگاه گرینر مثال ۴

برای جزئیات بیشتر درباره محاسبه دستگاه گرینر با الگوریتم DISPGB به [۱۱، ۱۶] مراجعه نمایید. همانطور که دیدیم، الگوریتم DISPGB هنگامی که ضرایب پیشروی غیرقابل تصمیم‌گیری به‌وجود می‌آیند، شاخه‌های جدیدی تولید می‌کند که می‌تواند به دلیل تکرار شاخه‌ها منجر به ناکارآمدی الگوریتم شود. برای رفع این مشکل، ما الگوریتم GES، یک نسخه پارامتری از روش حذف گاوسی را روی الگوریتم DISPGB نصب می‌کنیم تا فضای پارامتر را از قبل به تعداد متناهی سلول پارامتری افزایش دهد. الگوریتم GES با خطی‌سازی همه چندجمله‌ای‌های غیرخطی از طریق معرفی متغیرهای جدید برای هر تک‌جمله‌ای، یک سیستم حذف گاوسی محاسبه می‌کند. در الگوریتم GESGVWCGS، ما الگوریتم DISPGB را برای محاسبه سیستم‌های گروینر ارتقا می‌دهیم. الگوریتم GESGVWCGS از یک ساختار افزایشی بر اساس محک‌های F5 استفاده می‌کند، در نتیجه کاهش‌های زوج‌های غیرضروری را در حین محاسبه پایه گروینر برای یک ایده‌آل را حذف می‌کند. لذا شاخه‌های جدید کمتری در فضای پارامتر ایجاد می‌کند. همچنین در الگوریتم GESGVWCGS تکنیک‌های جبر خطی پارامتری برای پارتیشن‌بندی اولیه فضای پارامتری استفاده می‌شود. ما در [۸] نشان دادیم که الگوریتم GESGVWCGS در بسیاری از مثال‌ها با تولید شاخه‌های کمتر، از الگوریتم DISPGB بهتر عمل می‌کند، بنابراین پیچیدگی محاسبات دستگاه گرینر را کاهش می‌دهد. برای جزئیات بیشتر درباره محاسبه دستگاه گرینر با الگوریتم GESGVWCGS به [۸] مراجعه نمایید.

رده‌بندی خودکار منحنی پارامتری

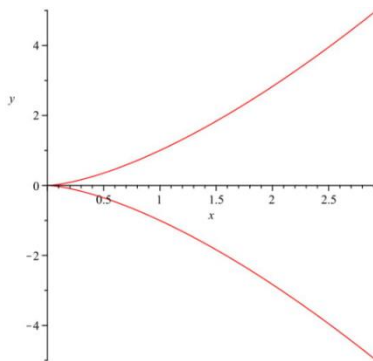
در این بخش ابتدا مفهوم نقاط منفرد یک منحنی را یادآوری می‌کنیم و سپس به‌عنوان کاربردی از چندگونای منفرد، نشان می‌دهیم چگونه می‌توان یک منحنی پارامتری را برحسب مقادیر مختلف پارامترها و بر اساس نقاط منفرد آن رده‌بندی کرد.

فرض کنیم $R = K[x_1, \dots, x_n]$ حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها و $Y = \mathbb{V}(f_1, \dots, f_m) \subset \mathbb{A}_K^n$ یک چندگونا^۱ باشد به‌طوری که $f_1, \dots, f_m \in R$. چندگونای Y در نقطه‌ی $p \in Y$ نامنفرد است هرگاه رتبه‌ی ماتریس $J = \left(\frac{\partial(f_i)}{\partial(x_j)} \right) (p)$ برابر $n - r$ باشد که در آن $r = \dim(Y)$. همچنین، چندگونای Y را نامنفرد^۲ نامیم هرگاه Y در هر $p \in Y$ نامنفرد باشد.

مثال ۵. منحنی $Y = \mathbb{V}(y^2 - x^3) \subset \mathbb{R}^2$ را در نظر می‌گیریم. از اینکه $f = y^2 - x^3$ نتیجه می‌گیریم

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial(f)}{\partial(x)} & \frac{\partial(f)}{\partial(y)} \end{pmatrix} = (-3x^2 \ 2y).$$

از طرفی $n = 2$ و $r = 1$ بنابراین Y در نقاطی که رتبه‌های ماتریس فوق برابر صفر شود منفرد است. به‌وضوح در نقطه‌ی $(0,0) \in Y$ رتبه‌ی ماتریس J برابر صفر است. پس $(0,0)$ نقطه‌ی منفرد منحنی فوق می‌باشد. در واقع $(0,0)$ نقطه‌ی بازگشت نوع یک^۳ نامیده می‌شود. در این نقطه، دو شاخه‌ی منحنی در دو طرف خط مماس قرار دارند. نمودار این منحنی به شکل زیر است.



شکل ۲: نقطه‌ی بازگشت

^۱ Variety

^۲ Non-Singular

^۳ Cuspidal point

بنابراین برای رده‌بندی خودکار خم‌های پارامتری در ابتدا باید به کمک ضابطه خم و تمام مشتق‌های آن نسبت به متغیرهای موجود در خم، یک ایده‌آل چندجمله‌ای تشکیل دهیم. از آنجایی که ایده‌آل حاصل به چندین پارامتر و متغیر بستگی دارد، با استفاده از الگوریتم GESGVWCGS یک دستگاه گربنر ایده‌آل تشکیل شده را نسبت به ترتیب تک‌جمله‌ای روی متغیرها و پارامترها محاسبه می‌کنیم. ریشه‌های مشترک هر پایه‌ی گربنر متناظر با شرایط پارامتری خودش در هر شاخه، همان نقاط تکین یا منفرد منحنی می‌باشد. اگر پایه گربنر شاخه‌ای برابر مجموعه یک شود تحت آن شرایط منحنی نامنفرد است.

حال منحنی پارامتری زیر را در نظر بگیرید:

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x_2 + a_4x + a_6$$

این فرمول کلی یک منحنی بیضوی^۱ است. بیان مفاهیم مقدماتی برای معرفی این منحنی خارج از این می‌باشد. برای کسب جزئیات بیشتر به [۲۶] مراجعه نمایید. نمایش ساده شده‌ی منحنی بیضوی فوق به‌صورت زیر است:

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

سؤالی که در این‌جا مطرح می‌شود این است که به‌ازای چه مقادیری از a, b منحنی فوق دارای نقطه‌ی منفرد می‌باشد. از هندسه‌ی جبری کلاسیک می‌دانیم یک منحنی بیضوی نقطه‌ی منفرد ندارد. همچنین شرط لازم و کافی برای اینکه منحنی $y^2 = x^3 + ax + b$ فاقد نقطه‌ی منفرد باشد این است که مقدار رابطه‌ی مبین $\Delta = 27b^2 + 4a^3$ مخالف صفر باشد. در ادامه با استفاده از الگوریتم GESGVWCGS این مسئله را بررسی می‌کنیم. برای این منظور با استفاده از $f = y^2 - x^3 - ax - b$ و مشتق‌های آن ایده‌آل زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$F = \langle f, \frac{\partial(f)}{\partial(x)}, \frac{\partial(f)}{\partial(y)} \rangle = \langle y^2 - x^3 - ax - b, -3x^2 - a, 2y \rangle$$

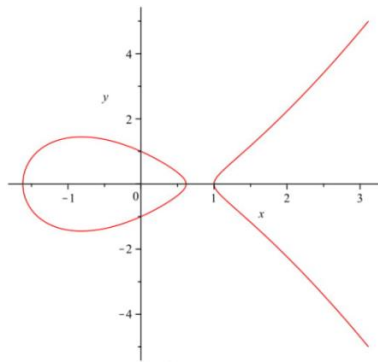
سپس $\text{GESGVWCGS}(F, b < a, y < x)$ را محاسبه می‌کنیم که نتیجه‌ی اجرای آن به‌صورت زیر است:

$$L = \{[[[], [a, b, 27b^2 + 4a^3], [1]], \\ [27b^2 + 4a^3], [a, b], [y - 2a^2 + 9xb]], \\ [b], [a], [1]], [[a], [b], [1]], \\ [b, a], [], [y, x^2]]\}.$$

مجموعه‌ی خروجی فوق دارای پنج عضو است که تمام آن‌ها را بررسی می‌کنیم. اولین عضو L مجموعه‌ی به‌صورت $(N_1, W_1, G_1) = ([[], [a, b, 27b^2 + 4a^3], [1]])$ است.

^۱ Elliptic curve

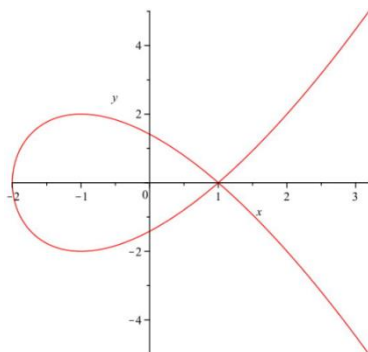
اگر مبین $\Delta = 27b^2 + 4a^3$ ، $I_1 = \langle \Delta \rangle$ و $I_2 = \langle a, b \rangle$ آنگاه چون $\Delta \in I_2$ نتیجه می‌گیریم که رابطه شمول $I_1 \subset I_2$ برقرار است. از طرفی عکس این رابطه همواره برقرار است. بنابراین $I_1 = I_2$ در نتیجه $V(I_1) = V(I_2)$. پس $V(\Delta)$ چندگونای منفرد کمینه برای چندجمله‌ای‌های F است. در واقع هنگامی که مبین $\Delta = 0$ منحنی پارامتری $y^2 = x^3 + ax + b$ دارای نقطه‌ی منفرد است و هنگامی که $\Delta \neq 0$ منحنی نقطه‌ی منفرد ندارد. در ادامه به کمک سه نمودار این مطلب را نشان می‌دهیم. ابتدا با توجه به مجموعه شرایط N_1, W_1 فرض می‌کنیم $a = -2$ و $b = 1$ (این مقادیر در N_1, W_1 صدق می‌کنند یعنی $\Delta \neq 0$). نمودار منحنی $y^2 - x^3 + 2x - 1 = 0$ به صورت زیر است:



شکل ۳: منحنی بیضوی

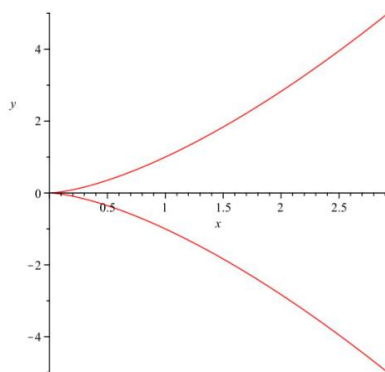
اکنون دومین عضو L یعنی $(N_2, W_2, G_2) = ([27b^2 + 4a^3], [a, b], [y, 9xb - 2a^2])$ را بررسی می‌کنیم. از اینکه $G_2 = [y, -2a^2 + 9xb]$ مقادیر $y = 0$ و $x = \frac{2a^2}{9b}$ را نتیجه می‌گیریم. در واقع هنگامی که $\Delta = 0$ و $a, b \neq 0$ نقطه‌ی $(\frac{2a^2}{9b}, 0)$ نقطه‌ی منفرد منحنی (نقطه مضاعف^۱) است. اگر $a = -3, b = 2$ آنگاه $(1, 0)$ نقطه‌ی منفرد منحنی $y^2 = x^3 + ax + b$ است. ضابطه‌ی این منحنی به‌ازای این مقادیر برابر $y^2 - x^3 + 3x - 2 = 0$ است که نمودار آن به صورت زیر است:

^۱ Nodal point



شکل ۴: نقطه گره یا مضاعف

رفتار سومین و چهارمین عضو L همانند اولین عضو آن می‌باشد زیرا $G_1 = G_3 = G_4 = [1]$. اکنون آخرین عضو مجموعه‌ی L یعنی $([b, a], [y, x^2]) = (N_5, W_5, G_5)$ را بررسی می‌کنیم. چون $G_5 = [y, x^2]$ نتیجه می‌گیریم به‌ازای مقادیر یکسان پارامترهای $a = b = 0$ (که می‌توان نتیجه گرفت $\Delta = 0$)، منحنی $y^2 = x^3 + ax + b$ در نقطه‌ی $(0,0)$ دارای نقطه‌ی منفرد است. نمودار $y^2 - x^3 = 0$ در زیر این نتیجه را نشان می‌دهد.



شکل ۵: نقطه بازگشتی

شایان ذکر است که با کمک الگوریتم DISPGB در [۲۳] این نتایج حاصل شده است و در این مقاله از الگوریتم GESGVWCGS برای این طبقه‌بندی هوشمند استفاده می‌کنیم. در ادامه منحنی پارامتری دیگری را بیان می‌کنیم و چندگونه‌ی منفرد کمینه‌ی^۱ آن را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۶. منحنی پارامتری زیر را در نظر بگیرید:

^۱ Minimal singular variety

$$x^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0$$

که در آن x, y متغیر و b, c, d, e, f پارامتر هستند. همانند مثال قبل قصد داریم چندگونای منفرد کمینه‌ی این منحنی را به‌ازای مقادیر مختلف پارامترها حساب کنیم. برای این منظور با در نظر گرفتن ضابطه منحنی که برابر چندجمله‌ای $g = x^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f$ است ایده‌آل زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$F = \langle g, \frac{\partial(g)}{\partial(x)}, \frac{\partial(g)}{\partial(y)} \rangle =$$

$$\langle x^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f, 2(x + cy + d), 2(by + cx + e) \rangle$$

پس از اجرای الگوریتم برای این ایده‌آل خروجی زیر حاصل می‌شود:

$$\text{GESGVWCGS}(F, f \prec_{\text{lex}} e \prec_{\text{lex}} d \prec_{\text{lex}} c \prec_{\text{lex}} b, y \prec_{\text{lex}} x) =$$

$$L = \{[[], [cd - e, c^2f + bd^2 - bf - 2cde + e^2], [1]], \\ [[cd - e, c^2f + bd^2 - bf - 2cde + e^2], [c, cd - e], [cyd - ey + d^2 - f, -de + cf + cdx - ex]], \\ [[c, bd^2 - bf + e^2], [d, e], [ey - d^2 + f, x + d]], \\ [[cd - e], [d^2 - f, -de + cf], [1]], \\ [[-ef + d^2e, -de + cf, cd - e], [d^2 - f], [1]], \\ [[d^2 - f, -de + cf, cd - e], [c, -c^2 + b], [y, x + d]], \\ [[e, d^2 - f, c], [b, d], [y, x + d]], \\ [[f, e, d, c], [b], [y, x]], \\ [[d^2 - f, -de + cf, cd - e, -c^2 + b], [c], [x + cy + d]], \\ [[e, d^2 - f, c, b], [d], [x + d]], \\ [[f, e, d, c, b], [], [x]] \}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود

$$\left\{ \begin{array}{ll} LM(B_i) = \{1\} & i = 1, 5, 6 \\ LM(B_i) = \{x, y\} & i = 2, 3, 4, 7, 8, 9 \\ LM(B_i) = \{x\} & i = 10, 11, 12 \end{array} \right.$$

پس منحنی $x^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0$ متناسب با مجموعه حالات (N_1, W_1) و (N_5, W_5) و (N_6, W_6) دارای نقطه‌ی منفرد نیست. زیرا پایه‌ی گرینر F متناظر با مجموعه حالات فوق برابر [1] است. چندجمله‌ای $\Delta = bd^2 - bf + c^2f - 2ecd + e^2$ متعلق به مجموعه N_2 را در نظر می‌گیریم. اگر $I_1, \dots, I_9$ ایده‌آل‌های تولید شده به‌وسیله‌ی عناصر مؤلفه‌های سوم اعضای L باشند آنگاه با کمک

دستور IdealMembership در نرم‌افزار MAPLE مشاهده می‌شود که به‌ازای $i = 1, \dots, 9$ مبین $\Delta \in I_i$ بنابراین نتیجه می‌گیریم $\langle \Delta \rangle = I_1 \subset I_i$ به‌ازای $i = 1, \dots, 9$.

در نتیجه $I_1 \subset I_1 \cap \dots \cap I_9$ و چون همواره عکس رابطه شمول اخیر درست است نتیجه می‌گیریم که $I_1 = I_1 \cap \dots \cap I_9$. پس $\mathbb{V}(I_1) = \mathbb{V}(I_1 \cap \dots \cap I_9)$ و در نتیجه $\mathbb{V}(\Delta)$ چندگونای منفرد کمینه دستگاه تولید شده به‌وسیله‌ی چندجمله‌ای‌های ایده‌آل F است. در واقع هنگامی که $\Delta = 0$ منحنی پارامتری

$$g = x^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f$$

دارای نقطه‌ی منفرد است و هنگامی که $\Delta \neq 0$ منحنی نقطه‌ی منفرد ندارد.

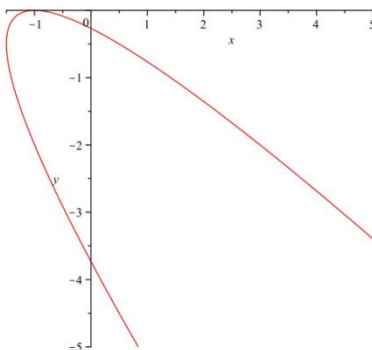
در ادامه به کمک دو نمودار این مطلب را نشان می‌دهیم. ابتدا اولین عضو L یعنی

$$[1], [cd - e, c^2f + bd^2 - bf - 2cde + e^2], [1]$$

را مطالعه می‌کنیم. متناسب با شرایط صفر و شرایط ناصفر زیر (یعنی $\Delta \neq 0$)

$$N_1 = [], \quad W_1 = [cd - e, c^2f + bd^2 - bf - 2cde + e^2]$$

مقادیر $b = 1, c = 1, d = 1, e = 2, f = 1$ را در نظر می‌گیریم. پس از جایگذاری این مقادیر در معادله‌ی منحنی داریم $x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 4y + 1 = 0$ که نمودار در ادامه آمده است.



شکل ۶: منحنی فاقد نقطه منفرد

همان‌طور که در نمودار مشاهده می‌کنیم، هنگامی که $\Delta \neq 0$ منحنی فاقد نقطه‌ی منفرد است. اکنون دومین عضو

$$L \text{ یعنی } [cd - e, c^2f + bd^2 - bf - 2cde + e^2], [c, cd - e], [cyd - ey + d^2 - f, -de + cf + cdx - ex]$$

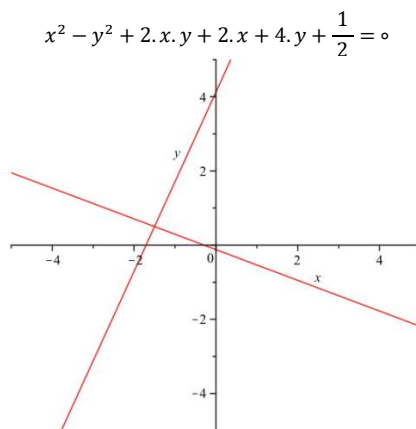
را در نظر می‌گیریم. چون $G_2 = [cyd - ey + d^2 - f, -de + cf + cdx - ex]$ پس $(x, y) =$

همچنین، از تساوی $\Delta = 0$ یا به‌طور معادل $\Delta \in N_2$ نتیجه می‌گیریم $(x, y) = \left(\frac{de - cf}{cd - e}, \frac{f - d^2}{cd - e} \right)$.

نقطه‌ی منفرد منحنی $x^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0$ حال اگر

$(x, y) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right)$ است، آنگاه N_2, W_2 متناسب با $b = -1, c = 1, d = 1, e = 2, f = \frac{1}{2}$

نقطه‌ی منفرد منحنی پارامتری $x^2 - y^2 + 2xy + 2x + 4y + \frac{1}{2} = 0$ می‌باشد که در شکل زیر مشاهده می‌کنید.



شکل ۷: منحنی دارای نقطه منفرد

۶. نتیجه گیری

تأثیر متقابل مطالعه منحنی‌های پارامتری، نقاط تکیه آن‌ها و ابزارهای محاسباتی مانند الگوریتم GESGVWCGS نه تنها چشم‌انداز نظری ما را غنی می‌کند، بلکه پیامدهای عملی در حوزه‌های علمی مختلف نیز دارد. با کمک این تکنیک‌ها، پتانسیل سیستم‌های خودکار برای تجزیه و تحلیل موجودیت‌های هندسی پیچیده به طور فزاینده‌ای قابل دسترس می‌شود و راه را برای درک و کاربرد ریاضی در سناریوهای دنیای واقعی هموار می‌شود. در پایان، همانند رده‌بندی اتومات منحنی‌های پارامتری، بسیاری از کاربردهای علمی و مهندسی می‌توانند با استفاده از ابزارهای جبر محاسباتی همچون دستگاه‌های گرینر با نتایج کاملاً رضایت بخش مورد بررسی قرار گیرد. منحنی‌های با ضرایب پارامتری در علوم مهندسی، علوم پایه و بخصوص ریاضی [۳۴-۳۱] به عنوان ابزاری اساسی هستند و امکان نمایش اشکال و حرکات پیچیده را فراهم می‌کنند. آنها در فیزیک، مهندسی، اقتصاد، کد و رمز و گرافیک کامپیوتری کاربرد دارند و به تحلیل حرکت ذرات، روندهای اقتصادی و انیمیشن‌های واقع گرایانه کمک می‌کنند.

تشکر و قدردانی

این مقاله، بخشی از نتایج پروژه فرصت مطالعاتی صنعت و جامعه اینجانب در شرکت دانش بنیان دانشجو یار خاوران است. همچنین، صمیمانه از نظرات و پیشنهادات ارزشمند داوران که کیفیت مقاله را افزایش داده‌اند سپاسگزارم.

References

- [1] Buchberger, B. (2006). "Bruno Buchberger's PhD thesis 1965: An algorithm for finding the basis elements of the residue class ring of a zero-dimensional polynomial

- ideal, *J. Symb. Comput.*, 41 (3-4), 475-511.
<https://doi.org/10.1016/j.jsc.2005.09.007>
- [2] Buchberger, B. (1979). A criterion for detecting unnecessary reductions in the construction of Gröbner bases, in *International Symposium on Symbolic and Algebraic Manipulation*, 3-21. https://doi.org/10.1007/3-540-09519-5_52
- [3] Lazard, D. (1983). Gröbner bases, Gaussian elimination and resolution of systems of algebraic equations, in *European Conference on Computer Algebra*, 146-156. https://doi.org/10.1007/3-540-12868-9_99
- [4] Faugère, J.-C. (1999). A new efficient algorithm for computing Gröbner bases (F4), *Journal of Pure and Applied Algebra*, 139 (1-3), 61-88. [https://doi.org/10.1016/S0022-4049\(99\)00005-5](https://doi.org/10.1016/S0022-4049(99)00005-5)
- [5] Faugère, J.-C. (2002). A new efficient algorithm for computing Gröbner bases without reduction to zero (F5), *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, 75-83. <https://doi.org/10.1145/780506.780516>
- [6] Weispfenning, V. (1992). Comprehensive Gröbner bases, *Journal of Symbolic Computation*, 14, (1), 1-29. [doi:10.1016/0747-7171\(92\)90023-W](https://doi.org/10.1016/0747-7171(92)90023-W).
- [7] Dehghani Darmian, M. (2024). Efficient Algorithm for Computing Inverse of Parametric Matrices, *Scientific Annals of Computer Science*, 1, 1-22. [doi:10.47743/SACS.2024.1.1](https://doi.org/10.47743/SACS.2024.1.1).
- [8] Dehghani Darmian, M. (2024). Improvement of an incremental signature-based comprehensive Gröbner system algorithm, *Math. Comput. Sci*, 18 (12). [doi:http://dx.doi.org/10.1007/s11786-024-00587-w](https://dx.doi.org/10.1007/s11786-024-00587-w).
- [9] Dehghani Darmian, M., & Hashemi, A. (2017). Parametric FGLM algorithm, *Journal of Symbolic Computation*, 82, 38-56. [doi:10.1016/j.jsc.2016.12.006](https://doi.org/10.1016/j.jsc.2016.12.006).
- [10] Dehghani Darmian, M., & Hashemi, A. (2024). Parametric F_4 Algorithm, *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics*, 19 (4), 117-133. [doi:http://dx.doi.org/10.61186/ijmsi.19.1.117](https://dx.doi.org/10.61186/ijmsi.19.1.117).
- [11] Dehghani Darmian, M., Hashemi, A., & Montes, A. (2011). Erratum to “A new algorithm for discussing Gröbner bases with parameters” *J. Symb. Comput.* 33 (1-2)(2002) 183-208, *J. Symb. Comput.*, 46 (10), 1187-1188. [doi:10.1016/J.JSC.2011.05.002](https://doi.org/10.1016/J.JSC.2011.05.002).
- [12] Hashemi, A., Dehghani Darmian, M., & Barkhordar, M. (2018). Universal Gröbner basis for parametric polynomial ideals, in *Mathematical Software–ICMS 2018: 6th International Conference, South Bend, IN, USA, Proceedings* Springer, 191-199. [doi:http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-96418-8_23](https://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-96418-8_23).
- [13] Hashemi, A., Dehghani Darmian, M., & Barkhordar, M. (2017). Gröbner systems conversion, *Mathematics in Computer Science*, 11, 61-77. [doi:10.1007/S11786-017-0295-3](https://doi.org/10.1007/S11786-017-0295-3).
- [14] Hashemi, A., M.-Alizadeh, B., & Dehghani Darmian, M. (2013). Minimal polynomial systems for parametric matrices, *Linear and Multilinear Algebra*, 61 (2), 265-272. [doi:https://doi.org/10.1080/03081087.2012.670235](https://doi.org/10.1080/03081087.2012.670235).
- [15] Kapur, D., Sun, Y., & Wang, D. (2010). A new algorithm for computing comprehensive Gröbner systems, in *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, 29-36. [doi:10.1145/1837934.1837946](https://doi.org/10.1145/1837934.1837946).

- [16] Montes, A. (2002). A new algorithm for discussing Gröbner bases with parameters, *J. Symb. Comput.*, 33 (2), 183-208. [doi:10.1006/JSCO.2001.0504](https://doi.org/10.1006/JSCO.2001.0504).
- [17] Montes, A., & Wibmer, M. (2010). Gröbner bases for polynomial systems with parameters, *J. Symb. Comput.*, 45 (12), 1391-1425. [doi:10.1016/J.JSC.2010.06.017](https://doi.org/10.1016/J.JSC.2010.06.017).
- [18] Montes, A., & Wibmer, M. (2014, August 5-9). Software for discussing parametric polynomial systems: The Gröbner Cover, in *Mathematical Software-ICMS 2014: 4th International Congress, Seoul, South Korea, Proceedings 4*, 406-413. [doi: 10.1007/978-3-662-44199-2_62](https://doi.org/10.1007/978-3-662-44199-2_62)
- [19] Suzuki, A., & Sato, Y. (2006). A simple algorithm to compute comprehensive Gröbner bases using Gröbner bases, in *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, 326-331. [doi:10.1145/1145768.1145821](https://doi.org/10.1145/1145768.1145821).
- [20] Weispfenning, V. (2002). Canonical comprehensive Gröbner bases, in *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, 270- 276. <https://doi.org/10.1145/780506.780541>
- [21] Abánades, M., Botana, F., Montes, A., & Recio, T. (2014, August 5-9). Software using the Gröbner Cover for geometrical loci computation and classification, in *Mathematical Software-ICMS 2014: 4th International Congress, Seoul, South Korea, Proceedings 4*, 492-499. [doi: 10.1007/978-3-662-44199-2_74](https://doi.org/10.1007/978-3-662-44199-2_74).
- [22] Cox, D. A., Little, J., & O'Shea, D. (2005). *Using algebraic geometry*. Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/b138611>.
- [23] Dehghani Darmian, M., Hashemi, A. (2010, November 10-11). Classification of cubic curves by Gröbner systems, presented at the 21st Algebra seminar of Iran, Tabriz, Iran.
- [24] Montes, A., & Recio, T. (2006, August 31-September 2). Automatic discovery of geometry theorems using minimal canonical comprehensive Gröbner systems, in *Automated Deduction in Geometry: 6th International Workshop, Pontevedra, Spain*, 113-138. [doi: 10.5555/1784950.1784958](https://doi.org/10.5555/1784950.1784958).
- [25] Suzuki, A., & Sato, Y. (2009). Computation of inverses in residue class rings of parametric polynomial ideal, in *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, 311-316. <https://doi.org/10.1145/1576702.15767>
- [26] Dimitrova, E. S., Jarrah, A. S., Laubenbacher, R., & Stigler. B. (2007). A Gröbner fan method for biochemical network modeling, in *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, 122-126. <https://doi.org/10.1145/1277548.127756>
- [27] Laubenbacher, R., & Stigler. B. (2004). A computational algebra approach to the reverse engineering of gene regulatory networks, *Journal of Theoretical Biology*, 229 (4), 523-537. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2004.04.037>
- [28] Cox, D. A., Little, J., & O'Shea, D. (2015). *Ideals, varieties, and algorithms*. Springer. [doi:10.1007/978-3-319-16721-3](https://doi.org/10.1007/978-3-319-16721-3).
- [29] Montes, A. (1998). Algebraic solution of the load-flow problem for a 4-node electrical network, *Mathematics and Computers in Simulation*, 45 (1-2), 163-174. [https://doi.org/10.1016/S0378-4754\(97\)00092-X](https://doi.org/10.1016/S0378-4754(97)00092-X)
- [30] Dehghani Darmian, M. (2025). Inverse Kinematic Solution for Romin Robot Based on Computer Algebra Techniques, *Karafan Quarterly Research Journal*, 22, 580-606, (In Persian), <https://doi.org/10.48301/kssa.2024.450007.2876>.

- [31] Dehghani Darmian, M. (2026). Comprehensive Intersection Systems and Their Computational Algorithms, *Karafan Quarterly Research Journal, to appear (In Persian)*, doi: [10.48301/kssa.2025.510985.3164](https://doi.org/10.48301/kssa.2025.510985.3164)
- [32] Dehghani Darmian, M. (2025). Elevating PGBMain Algorithm Performance Through Strategic Minimal Dickson Basis Selection, *Computational Algorithms and Numerical Dimensions*, 4, 308–317, <https://doi.org/10.22105/cand.2025.507063.1188>
- [33] Dehghani Darmian, M. (2026). An Algorithm for Minimal Generating Set of Parametric Homogeneous Polynomial Ideals, *Journal of Prime Research in Mathematics*, 22(1), 61-75. doi:[10.1007/s40010-026-01138-7](https://doi.org/10.1007/s40010-026-01138-7)
- [34] Dehghani Darmian, M. (2025). A Computer Algebra Approach to Linear ODE Systems with Parametric Coefficients, *Control and Optimization in Applied Mathematics*, no. 2, 135–152, 10 (2025) doi. [10.30473/coam.2025.74498.1307](https://doi.org/10.30473/coam.2025.74498.1307)