Karafan

Quarterly Scientific Journal of National University of Skills

Special Issue 2025, Vol. 22, p. 628-643

Journal Homepage: https://karafan.tvu.ac.ir/?lang=en

10.48301/kssa.2024.406037.2627

A hybrid conjugate gradient approach by combining FR and LS algorithms for solving compressive sensing problem

Farzad Rahpeymaii[1]*, Majid Rostami[1]

[1] Department of Basic Sciences, Technical and Vocational University (TVU), Tehran, Iran

ARTICLE INFO

Article Type:
Original Research

Received: 05.04.2023
Revised: 07.02.2023
Accepted: 07.08.2023

Keyword:
Conjugate gradient method
Convex constraints
Projection method
Monotone equations
Compressive sensingTalent

***Corresponding Author:**
Farzad Rahpeymaii
Email:
rahpeyma_83@yahoo.com

ABSTRACT

In this paper, we introduce a hybrid conjugate gradient method for solving monotonic nonlinear equations with convex constraints by combining FR and LS conjugate gradient methods. Conjugate gradient (CG) iterative methods have a simple structure and are low-memory algorithms. In these methods, no matrix is stored and only matrix multiplication by vector is done. If the generated iterations be out of the convex region, we move them to the convex region using the projection method. The new algorithm is a combination of a conjugate gradient method with strong convergence and another conjugate gradient method with high computational efficiency. Also, the generated directions by the hybrid conjugate gradient method are sufficient descent. We prove the global convergence of the new algorithm under some standard assumptions. The compressive sensing problem is formulated as a nonlinear equation with convex constraints. So, we use the hybrid method to solve the compressive sensing minimization problem and remove noise from images.

E-ISSN: 2538-4430
ISSN: 2382-9796

EXTENDED ABSTRACT

Introduction

Conjugate gradient (CG) iterative methods have a simple structure and are low memory algorithms. In these methods, no matrix is stored and only matrix multiplication by vector is done. In this paper, by combining FR and LS conjugate gradient methods, we introduce a hybrid conjugate gradient method for solving monotonic nonlinear equations with convex constraints. If the generated iterations be out of the convex region, we move them to the convex region using projection method. The new algorithm is a combination of a conjugate gradient method with strong convergence and another conjugate gradient method with high computational efficiency. Also, the generated directions by the hybrid conjugate gradient method are sufficient descent. We prove the global convergence of the new algorithm under some standard assumptions. Compressive sensing problem is formulated as a nonlinear equation with convex constraints. So, we use the hybrid method to solve the compressive sensing minimization problem and removing noise from images.

Let $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ be a non-empty, closed and convex subset and $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ be a continuous and monotone mapping. Now, the nonlinear monotone equation with convex constraints is

$$F(x) = 0, \qquad x \in \Omega. \tag{1}$$

Some problem such as the power flow equations, compressive sensing and the economic equilibrium problem leads to (1). Conjugate gradient methods are useful algorithms to solve nonlinear monotone equations. In these methods using an initial point $x_0 \in \Omega$, a sequence of iterates obtain by $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ in which

$$d_k = \begin{cases} -F_k, & k = 0, \\ -F_k + \alpha_k d_{k-1}, & k \geq 1. \end{cases} \tag{2}$$

Also $\alpha_k > 0$ is the step length which is computed by inexact line search. To describe our algorithm, we recall the projection map denoted as $P_\Omega : \mathbb{R}^n \to \Omega$ that is

$$P_\Omega(x) = \text{argmain}\{\|x - y\|, y \in \Omega\},$$

which has the well-known non-expansive property

$$\|P_\Omega(x) - P_\Omega(y)\| \leq \|x - y\|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Methodology

The convergence of FR conjugate gradient method has been proven for a wide range of functions, but this method is not numerically very strong. On the other hand, LS conjugate gradient method has high numerical efficiency, but it does not have strong convergence. In this section, by combining FR and LS conjugate gradient parameters, we introduce a hybrid conjugate gradient method to solve the nonlinear equation (1). In the combined method, we calculate the direction as follows

$$d_k = \begin{cases} -F_k, & k = 0, \\ -F_k + \beta_k^N \left(I - \dfrac{F_k F_k^T}{\| F_k \|^2} \right) d_{k-1}, & k \geq 1, \end{cases} \tag{3}$$

Where conjugate gradient parameter β_k^N obtain by

$$\beta_k^N = (1-\lambda_k) b_k^{LS} + \lambda_k b_k^{FR} = -(1-\lambda_k) \frac{F_k^T y_{k-1}}{F_{k-1}^T d_{k-1}} + \lambda_k \frac{\| F_k \|^2}{\| F_{k-1} \|^2}. \tag{4}$$

Hence

$$d_k = -F_k + \left(-(1-\lambda_k) \frac{F_k^T y_{k-1}}{F_{k-1}^T d_{k-1}} + \lambda_k \frac{\| F_k \|^2}{\| F_{k-1} \|^2} \right) \left(d_{k-1} - \frac{d_{k-1}^T F_k}{\| F_k \|^2} F_k \right). \tag{5}$$

Now, we compute λ_k such that the search direction d_k satisfies the famous conjugacy condition $d_k^T y_{k-1} = 0$.

Therefore

$$\lambda_k = \frac{1}{\beta_k^{FR} - \beta_k^{LS}} \left(\frac{F_k^T y_{k-1}}{\Sigma_k} - \beta_k^{LS} \right), \tag{6}$$

and

$$\Sigma_k = d_{k-1}^T y_{k-1} - \frac{d_{k-1}^T F_k}{\| F_k \|^2} F_k^T y_{k-1}.$$

Compressive sensing is one of the basic topics in signal processing and removing noise from images. On the other hand, image processing plays an important role in medical sciences, biological sciences, economics and engineering. Let $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Compressive sensing problem is to find the sparse signal vector that satisfies to the linear equation system

$Ax = b$. In this system, $b \in \mathbb{R}^m$ is a vector of observations obtained from laboratory sampling. To remove noise from the image, we must choose the sparest solution by solving the following optimization problem

$$\min_{x} \ \frac{1}{2}\| Ax - b\|^2 + \tau \| x\|_1,$$

in which $\tau > 0$ is a parameter. This problem can be converted into a nonlinear equation with convex constraints and then solved it with HLSFR algorithm. For convergence analysis the hybrid conjugate gradient method based on FR and LS algorithms (HLSFR), we use the following assumptions:

(H1) The mapping F is Lipschitz continuous. That is,

$$\| F(x) - F(y)\| \le L \| x - y\|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

(H2) The solution set Ω^* is nonempty.

Lemma 1. Let d_k be the search direction generated by (5). Then, d_k always satisfies the sufficient decent condition. That is,

$$F_k^T d_k = -\| F_k\|^2.$$

Theorem 1. Suppose the Assumptions (H1) and (H2) hold. Then, the sequence $\{x_k\}$ generated by HLSFR method converges globally to a solution of (1). In other words

$$\lim_{k \to \infty} \inf \| F_k \| = 0.$$

Results and Discussion

Suppose $\bar{x}$ be the original image and x be the recovered image. One of the important criteria for comparing the efficiency of methods in image reconstruction is the signal-to-noise ratio, which is calculated as follows

$$\text{PSNR} = 20\log_{10} \frac{(255)^2}{\frac{1}{mn}\sum_{i,j}\left(x_{i,j} - \bar{x}_{i,j}\right)^2}. \qquad (7)$$

We compare the results of the hybrid conjugate gradient method with the CGD and IPBDF algorithms. First, we blur some images with Gaussian noise and then reconstruct them with HLSFR, CGD and IPBDF methods. The PSNR values for some images for different values of Gaussian noise are presented in Table 1, which shows that the PSNR value for HLSFR algorithm is higher than other methods. Therefore, this method has removed more noise from images.

Table 1 PSNR values for different Gaussian noises

HLSFR	IPBDF	CGD	values of Gaussian nois	Image
22.97	22.95	22.84	0.1	P_1
14.34	14.55	13.59	1	P_1
6.68	6.51	5.14	4	P_1
3.15	3.03	1.98	6.25	P_1
20.98	20.95	20.82	0.1	P_2
14.08	14.28	13.4	1	P_2
6.61	6.49	5	4	P_2
2.99	2.89	1.75	6.25	P_2
22.77	22.74	22.62	0.1	P_3
14.28	14.59	13.52	1	P_3
6.66	6.58	5.24	4	P_3
2.4	2.3	1.24	6.25	P_3
18.65	18.61	18.52	0.1	P_4
13.69	13.99	13.08	1	P_4
6.58	6.42	5.1	4	P_4
2.56	2.45	1.52	6.25	P_4

Conclusions

In this paper, a conjugate gradient method is presented for solving nonlinear equations with convex constraints. The new method is a combination of FR and LS conjugate gradient methods. Global convergence of this method has been proven under some standard assumptions. Also, the problem of compressive sensing problem is modeled as a nonlinear equation to remove noise and blurring of images. Therefore, the hybrid conjugate gradient algorithm can be used to remove blurring of images. The numerical results show that the HLSFR method is more effective in removing the blurring of images compared to some other iterative methods.

کارافن
فصلنامه علمی دانشگاه ملی مهارت
ویژه‌نامه ١٤٠٤، دوره ٢٢، . ٦٢٨-٦٤٣
آدرس نشریه: https://karafan.tvu.ac.ir/
doi: 10.48301/kssa.2024.406037.2627

یک رویکرد گرادیان مزدوج ترکیبی با ترکیب الگوریتم‌های FR و LS برای حل مسأله سنجش فشرده

فرزاد راه‌پیمایی[۱]، مجید رستمی[۱]

۱-گروه علوم پایه، دانشگاه ملی مهارت، تهران، ایران

اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

دریافت مقاله: ۱۴۰۲/۰۲/۱۴
بازنگری مقاله: ۱۴۰۲/۰۴/۱۱
پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۰۴/۱۷

کلید واژگان:
روش گرادیان مزدوج
قیدهای محدب
روش تصویر
معادلات یکنوا
سنجش فشرده

***نویسنده مسئول:** فرزاد راه‌پیمایی
پست الکترونیکی:
rahpeyma_83@yahoo.com

چکیده

در این مقاله با ترکیب روش‌های گرادیان مزدوج FR و LS یک روش گرادیان مزدوج ترکیبی برای حل معادلات غیرخطی یکنوا با قیدهای محدب معرفی می‌کنیم. روش‌های تکراری گرادیان مزدوج دارای ساختار ساده‌ای هستند و به حافظه کمی نیاز دارند. در این روش‌ها نیازی به ذخیره ماتریس وجود ندارد و فقط ضرب ماتریس در بردار انجام می‌شود. اگر تکرارهای تولید شده بیرون ناحیه محدب قرار بگیرند با استفاده از روش تصویر آن‌ها را در ناحیه محدب قرار می‌دهیم. الگوریتم جدید ترکیب یک روش گرادیان مزدوج با همگرایی قوی و یک روش گرادیان مزدوج دیگر با کارایی محاسباتی بالا است. همچنین جهت‌های تولید شده با روش گرادیان مزدوج ترکیبی کاهشی کافی هستند. تحت برخی فرض‌های استاندارد همگرایی سراسری الگوریتم جدید را ثابت می‌کنیم. مسأله سنجش فشرده به‌صورت یک معادله غیرخطی با قیدهای محدب مدلسازی می‌شود. لذا از روش گرادیان مزدوج ترکیبی برای حل مسأله مینیمم‌سازی سنجش فشرده و حذف نویز از تصاویر استفاده می‌کنیم.

شاپای الکترونیکی: ۲۵۳۸-۴۴۳۰
شاپای چاپی: ۲۳۸۲-۹۷۹۶

مقدمه

فرض کنید $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ یک مجموعه بسته، ناتهی و محدب باشد. معادله غیرخطی یکنوا با قیدهای محدب

$$F(x) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{1}$$

را در نظر بگیرید که در آن $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ پیوسته و یکنوا است. مسائل مختلفی از جمله معادلات جریان توانی، سنجش فشرده و تعادل اقتصادی به‌صورت یک معادله غیرخطی یکنوا با قیدهای محدب مدلسازی می‌شوند (بنهام و همکارش، ۱۹۹۷)[1]. برای حل این معادلات الگوریتم‌های تکراری مختلفی از جمله روش نیوتن(سان و همکارش، ۱۹۹۳)[2] روش شبه‌نیوتن (دنیس و همکارش، ۱۹۷۴)[3] و روش لونبرگ[4]-مارکورات[5] (یاماشیتا و همکارش، ۲۰۰۱)[6] ارائه شده است. اگر اندازه مسأله بزرگ باشد هزینه محاسباتی این روش‌ها بسیار بالا خواهد بود. برای معادلات غیرخطی یکنوا با اندازه بزرگ، روش‌های گرادیان مزدوج بسیار مؤثر هستند، زیرا در هر تکرار روش‌های گرادیان مزدوج نیاز به ذخیره ماتریس وجود ندارد و فقط ضرب ماتریس در بردار انجام می‌شود. بنابراین این روش‌ها به حافظه کمی برای ذخیره اطلاعات نیاز دارند و برای مسائل با اندازه بزرگ بسیار مناسب هستند.

روش‌های گرادیان مزدوج با شروع از نقطه آغازین $x_0 \in \Omega$ تکرارهای بعدی را به‌صورت

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k, \qquad k = 0,1,2,\ldots \tag{2}$$

تولید می‌کنند که در آن d_k جهت جستجو و α_k طول گام است که معمولاً با روش‌های جستجوی خطی تقریبی محاسبه می‌شود (پارسامنش و همکارانش، ۲۰۲۲). اگر به‌ازای $c > 0$ داشته باشیم

$$F_k^T d_k \leq -c \|F_k\|^2, \tag{3}$$

آن‌گاه d_k یک جهت کاهشی کافی است که $F_k = F(x_k)$ و $\|.\|$ نرم اقلیدسی می‌باشند. ساختار کلی جهت جستجوی d_k در روش‌های گرادیان مزدوج به‌صورت

$$d_k = \begin{cases} -F_k, & k = 0, \\ -F_k + \beta_k d_{k-1}, & k \geq 1, \end{cases} \tag{4}$$

است که در آن $\beta_k \in \mathbb{R}$ پارامتر گرادیان مزدوج نامیده می‌شود و انتخاب‌های مختلف برای آن به انواع روش‌های گرادیان مزدوج منجر می‌شود. مشهورترین پارامترهای گرادیان مزدوج توسط فلچر[7]-ریوز[8] (FR) (فلچر و همکارش،

[1] Banham
[2] Sun
[3] Dennis
[4] Levenberg
[5] Marquardt
[6] Yamashita
[7] Fletcher
[8] Reeves

۱۹۶۴)، هستنس[۱]-استیفل[۲] (HS) (هستنس و همکارش، ۱۹۵۲)، دای[۳]-یوان[۴] (DY) (دای و همکارش، ۱۹۹۹) و لیو[۵]-استوری[۶] (لیو و همکارش، ۱۹۹۱) به‌صورت زیر ارائه شده‌اند:

$$\beta_k^{FR} = \frac{\| F_k \|^2}{\| F_{k-1} \|^2}, \qquad \beta_k^{HS} = \frac{F_k^T y_{k-1}}{d_{k-1}^T y_{k-1}},$$

$$\beta_k^{DY} = \frac{\| F_k \|^2}{d_{k-1}^T y_{k-1}}, \qquad \beta_k^{LS} = -\frac{F_k^T y_{k-1}}{F_{k-1}^T d_{k-1}}.$$

که در آن $y_{k-1} = F_k - F_{k-1}$ است. در ادامه برخی مفاهیم پایه‌ای مورد نیاز در این مقاله را معرفی می‌کنیم.

گزاره ۱: اگر تابع $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ یکنوا باشد آن‌گاه برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$ داریم (دنیس و همکارش، ۱۹۹۶)[۷]

$$\left(F(x) - F(y)\right)^T (x - y) \geq 0$$

تعریف ۱: عملگر تصویر $P_\Omega : \mathbb{R}^n \to \Omega$ به‌صورت

$$P_\Omega(x) = \text{argmain}\left\{\| x - y \|, y \in \Omega\right\},$$

می‌باشد که در خاصیت زیر صدق می‌کند

$$\|P_\Omega(x) - P_\Omega(y)\| \leq \|x - y\|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

اکنون به بیان ساختار کلی مقاله می‌پردازیم. در بخش بعدی با ترکیب روش‌های گرادیان مزدوج FR و LS یک روش جدید برای حل معادلات غیرخطی معرفی می‌کنیم. در بخش سوم ثابت می‌کنیم که جهت‌های تولید شده با الگوریتم ترکیبی کاهشی کافی هستند. همچنین همگرایی سراسری این الگوریتم را ثابت می‌کنیم. در بخش چهارم مسأله سنجش فشرده را به یک معادله غیرخطی تبدیل کرده و از الگوریتم گرادیان مزدوج ترکیبی برای حل آن استفاده می‌کنیم. نتایج عددی حاصل از روش ترکیبی برای حل مسأله سنجش فشرده و رفع نویز از تصاویر در بخش پنجم ارائه شده است. در بخش ششم نیز نتیجه‌گیری این مقاله بیان شده است.

روش گرادیان مزدوج ترکیبی برای حل معادله غیرخطی

همگرایی روش گرادیان مزدوج FR برای دسته وسیعی از توابع ثابت شده است اما این روش از لحاظ عددی خیلی قوی نیست. از طرفی روش گرادیان مزدوج LS کارایی عددی بالایی دارد ولی دارای همگرایی قوی نیست (گیلبرت و همکارش، ۱۹۹۲)[۸]. در این بخش با ترکیب پارامترهای گرادیان مزدوج FR و LS یک روش گرادیان

---

[۱] Hestenes

[۲] Steifel

[۳] Dai

[۴] Yuan

[۵] Liu

[۶] Storey

[۷] Deniss

[۸] Gilbert

مزدوج ترکیبی برای حل معادله غیرخطی (۱) معرفی می‌کنیم. در روش ترکیبی جهت d_k را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$d_k = \begin{cases} -F_k, & k = 0, \\ -F_k + \beta_k^N \left(I - \dfrac{F_k F_k^T}{\| F_k \|^2} \right) d_{k-1}, & k \geq 1. \end{cases} \tag{۵}$$

پارامتر β_k^N از ترکیب β_k^{FR} و β_k^{LS} به‌دست می‌آید

$$\beta_k^N = (1-\lambda_k)\beta_k^{LS} + \lambda_k \beta_k^{FR} = -(1-\lambda_k)\frac{F_k^T y_{k-1}}{F_{k-1}^T d_{k-1}} + \lambda_k \frac{\| F_k \|^2}{\| F_{k-1} \|^2}, \tag{۶}$$

که در آن $\lambda_k \in \mathbb{R}$ است. با جایگذاری (۶) در (۵) جهت گرادیان مزدوج ترکیبی به‌صورت زیر حاصل می‌شود

$$d_k = -F_k + \left(-(1-\lambda_k)\frac{F_k^T y_{k-1}}{F_{k-1}^T d_{k-1}} + \lambda_k \frac{\| F_k \|^2}{\| F_{k-1} \|^2} \right)\left(d_{k-1} - \frac{d_{k-1}^T F_k}{\| F_k \|^2} F_k \right). \tag{۷}$$

اکنون پارامتر ترکیب محدب λ_k را طوری محاسبه می‌کنیم که جهت d_k در شرط تزویج $d_k^T y_{k-1} = 0$ صدق کند. بنابراین

$$-F_k^T y_{k-1} + \beta_k^N \left(d_{k-1}^T y_{k-1} - \frac{d_{k-1}^T F_k}{\| F_k \|^2} F_k^T y_{k-1} \right) = 0.$$

به‌عبارت دیگر

$$-F_k^T y_{k-1} + \left((1-\lambda_k)\beta_k^{LS} + \lambda_k \beta_k^{FR} \right) \Sigma_k = 0, \tag{۸}$$

که در آن

$$\Sigma_k = d_{k-1}^T y_{k-1} - \frac{d_{k-1}^T F_k}{\| F_k \|^2} F_k^T y_{k-1}.$$

با ساده‌سازی (۸) خواهیم داشت

$$\lambda_k = \frac{1}{\beta_k^{FR} - \beta_k^{LS}} \left(\frac{F_k^T y_{k-1}}{\Sigma_k} - \beta_k^{LS} \right). \tag{۹}$$

اکنون به بیان گام‌های الگوریتم گرادیان مزدوج ترکیبی برای حل معادله غیرخطی (۱) می‌پردازیم.

الگوریتم ۱: روش گرادیان مزدوج ترکیبی **(HLSFR)**

گام اول: نقطه آغازین $x_0 \in \Omega$ و مقادیر ثابت $\xi \in (0,1)$، $\rho \in (0,2)$، $\varepsilon > 0$ و $\gamma > 0$ را انتخاب کن و قرار بده $k = 0$.

گام دوم: اگر $\| F_k \| \leq \varepsilon$ توقف کن. در غیراینصورت جهت d_k را با (۵) و پارامتر λ_k را با (۹) محاسبه کن.

اگر $\lambda_k \in (0,1)$ پارامتر β_k^N را با رابطه (۶) محاسبه کن.

اگر $\lambda_k \geq 1$ قرار بده $\beta_k^N = \beta_k^{FR}$.

اگر $\lambda_k \leq 1$ قرار بده $\beta_k^N = \beta_k^{LS}$.

اگر $\Sigma_k = 0$ قرار بده $\lambda_k = 0$.

گام سوم: فرض کنید $\alpha_k = \max\{\xi^m \mid m = 0,1,2,...\}$ باشد. طول گام α_k را طوری می‌یابیم که نابرابری زیر برقرار باشد

$$-F\left(x_k + \xi^m d_k\right)^T d_k \geq \gamma \xi^m \|d_k\|^2. \qquad (10)$$

گام چهارم: تکرار آزمایشی جدید را به‌صورت $z_k = x_k + \alpha_k d_k$ محاسبه کن.

گام پنجم: اگر $z_k \in \Omega$ و $\|F_k\| \leq \varepsilon$ قرار بده $x_{k+1} = z_k$ و توقف کن. در غیراینصورت تکرار جدید را به‌صورت زیر محاسبه کن

$$x_{k+1} = P_\Omega\left[x_k - \rho\varphi_k F(z_k)\right],$$

که در آن

$$\varphi_k = \frac{F(z_k)^T (x_k - z_k)}{\|F(z_k)\|^2}.$$

گام ششم: به جای k قرار بده $k+1$ و به گام دوم برو.

آنالیز همگرایی

در این بخش به برر سی همگرایی الگوریتم **HLSFR** می‌پردازیم. برای این منظور ابتدا فرض‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

(H1) تابع F در $\mathbb{R}^n$ پیوسته لیپ‌شیتس است. به‌عبارت دیگر، ثابت $L > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L\|x - y\|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

(H2) مجموعه جواب Ω^* برای معادله غیرخطی (۱) ناتهی است.

از فرض **(H1)** نتیجه می‌گیریم که ثابت $\zeta > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\|F(x)\| \leq \zeta.$$

گزاره ۲: اگر جهت d_k با (۵) تولید شده باشد آن‌گاه $\lim_{k\to\infty} \alpha_k \|d_k\| = 0$ است.

گزاره ۳: اگر طول گام α_k در شرط جستجوی خطی نادقیق (۱۰) صدق کند آن‌گاه (گیلبرت و همکاران، ۱۹۹۲)

$$\alpha_k \geq \min\left\{1, \frac{\xi}{L+\gamma}\frac{\|F_k\|^2}{\|d_k\|^2}\right\}.$$

لم زیر نشان می‌دهد که جهت‌های تولید شده با الگوریتم گرادیان مزدوج ترکیبی در شرط کاهشی کافی (۳) صدق می‌کنند.

لم ۱: اگر جهت d_k با (۵) تولید شده باشد آن‌گاه در شرط زیر صدق می‌کند

$$F_k^T d_k = -\|F_k\|^2.$$

اثبات: از (۵) داریم

$$F_k^T d_k = -\|F_k\|^2 + \beta_k^N \left(F_k^T d_{k-1} - \frac{\|F_k\|^2}{\|F_k\|^2} F_k^T d_{k-1}\right) = -\|F_k\|^2 < 0.$$

■

همگرایی سراسری الگوریتم **HLSFR** تحت برخی فرض‌های استاندارد در قضیه زیر ثابت شده است.

قضیه ۱: فرض کنید **(H1)** و **(H2)** برقرار باشند. در اینصورت دنباله $\{x_k\}$ که توسط الگوریتم **HLSFR** تولید شده است به جواب معادله غیرخطی (۱) همگرای سراسری می‌باشد. به‌عبارت دیگر

$$\lim_{k\to\infty} \inf \| F_k \| = 0. \qquad (۱۱)$$

اثبات: به برهان خلف فرض کنید (۱۱) برقرار نباشد. در اینصورت ثابت $\varepsilon_0 > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\| F_k \| \geq \varepsilon_0, \qquad \forall k \geq 0. \qquad (۱۲)$$

از لم ۱ داریم

$$\| F_k \|^2 = -F_k^T d_k \leq \| F_k \| \| d_k \|.$$

پس

$$\| d_k \| \geq \| F_k \| \geq \varepsilon_0, \qquad \forall k \geq 0. \qquad (۱۳)$$

اکنون از (۷) نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}\| d_k \| &= \left\| -F_k + \left(-(1-\lambda_k)\frac{F_k^T y_{k-1}}{F_{k-1}^T d_{k-1}} + \lambda_k \frac{\| F_k \|^2}{\| F_{k-1} \|^2} \right) \left(d_{k-1} - \frac{d_{k-1}^T F_k}{\| F_k \|^2} F_k \right) \right\| \\ &= \left\| -F_k + \left(-(1-\lambda_k)\frac{F_k^T y_{k-1}}{F_{k-1}^T d_{k-1}} + \lambda_k \frac{\| F_k \|^2}{\| F_{k-1} \|^2} \right) d_{k-1} - \left(-(1-\lambda_k)\frac{F_k^T y_{k-1}}{F_{k-1}^T d_{k-1}} + \lambda_k \frac{\| F_k \|^2}{\| F_{k-1} \|^2} \right) \frac{d_{k-1}^T F_k}{\| F_k \|^2} F_k \right\|.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\| d_k \| &\leq \| F_k \| + 2\left(\frac{\| F_k \| \| y_{k-1} \|}{| F_{k-1}^T d_{k-1} |} + \frac{\| F_k \|^2}{\| F_{k-1} \|^2} \right) \| d_{k-1} \| \\ &\leq \zeta + 2\left(\frac{\zeta L + \zeta^2}{\varepsilon_0^2} \right) \| d_{k-1} \|.\end{aligned}$$

برای هر $k \geq k_0$ فرض کنید

$$M_1 = 2\left(\frac{\zeta L + \zeta^2}{\varepsilon_0^2} \right), \qquad M^* = \max\left\{ \| d_0 \|, \| d_1 \|, \ldots, \| d_{k_0} \|, M_1 \right\}.$$

در نتیجه

$$\| d_k \| \leq M^*. \qquad (۱۴)$$

اکنون از گزاره ۳، (۱۳) و (۱۴) خواهیم داشت

$$\alpha_k \|d_k\| \ge \min\left\{1, \frac{\xi}{L+\gamma}\frac{\|F_k\|^2}{\|d_k\|^2}\right\}\|d_k\|$$
$$\ge \min\left\{\|d_k\|, \frac{\xi}{L+\gamma}\frac{\|F_k\|^2}{\|d_k\|}\right\}$$
$$\ge \min\left\{\varepsilon_0, \frac{\xi\varepsilon_0^2}{(L+\gamma)M^*}\right\},$$

که با گزاره ۲ در تناقض است.

■

روش گرادیان مزدوج ترکیبی برای حل مسأله سنجش فشرده

سنجش فشرده یکی از موضوعات اساسی در پردازش سیگنال‌ها و رفع نویز از تصاویر است. از طرفی پردازش تصویر نقش مهمی در علوم پزشکی، علوم بیولوژیک، اقتصاد و مهندسی ایفا می‌کند (بنهام و همکارش، ۱۹۹۷). ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ را در نظر بگیرید. مسأله سنجش فشرده عبارت است از یافتن بردار سیگنال تنک $x \in \mathbb{R}^n$ که در دستگاه معادلات خطی $Ax=b$ صدق می‌کند. در این دستگاه $b \in \mathbb{R}^m$ بردار مشاهدات است که از نمونه‌برداری‌های آزمایشگاهی به‌دست می‌آید. دستگاه $Ax=b$ بدوضع است و بی‌نهایت جواب دارد. برای رفع نویز از تصاویر باید تنک‌ترین جواب را با حل مسأله بهینه‌سازی زیر انتخاب کنیم

$$\min_x \ \frac{1}{2}\|Ax-b\|^2+\tau\|x\|_1, \tag{۱۵}$$

که در آن $\tau>0$ است. بردار $x \in \mathbb{R}^n$ را به‌صورت

$$x=u-v, \qquad u\ge 0, \qquad v\ge 0,$$

تبدیل می‌کنیم که در آن $u,v \in \mathbb{R}^n$ هستند و مؤلفه‌های آن‌ها به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$u_i=\max\{0,x_i\}, \qquad i=1,2,\ldots,n,$$
$$v_i=\max\{0,-x_i\}, \qquad i=1,2,\ldots,n.$$

اگر e_n برداری n-بعدی با مؤلفه‌های یک باشد آن‌گاه

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|=e_n^T u+e_n^T v.$$

اکنون مسأله (۱۵) را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\min_{u,v}\frac{1}{2}\|b-A(u-v)\|^2+\tau e_n^T u+\tau e_n^T v, \qquad u,v\ge 0. \tag{۱۶}$$

با فرض

$$z=\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}, \qquad c=\tau e_{2n}+\begin{bmatrix}-y\\ y\end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} A^T A & -A^T A \\ -A^T A & A^T A \end{bmatrix}, \quad b = A^T y,$$

مسأله بهینه‌سازی (۱۶) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\min_z \frac{1}{2} z^T Hz + c^T z \qquad z \geq 0. \tag{17}$$

چون ماتریس H نیمه معین‌مثبت است لذا (۱۷) یک مسأله بهینه‌سازی درجه دوم محدب خواهد بود که با معادله غیرخطی زیر معادل است

$$F(z) = \min\{z, Hz + c\} = 0, \tag{18}$$

که در آن $F(z)$ پیوسته و یکنوا است لذا معادله (۱۸) را با روش **HLSFR** حل می‌کنیم.

نتایج عددی

در این بخش از الگوریتم گرادیان مزدوج ترکیبی برای بازسازی تصاویر استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $\bar{x}$ تصویر اصلی و x تصویر باز سازی شده با شد. یکی از معیارهای مهم برای مقایسه کارایی روش‌ها در باز سازی تصاویر نسبت سیگنال به نویز است که به‌صورت زیر محاسبه می‌شود (حسینی و همکارانش، ۲۰۲۲)

$$\mathrm{PSNR} = 20 \log_{10} \frac{(255)^2}{\frac{1}{mn} \sum_{i,j} \left(x_{i,j} - \bar{x}_{i,j} \right)^2}. \tag{19}$$

همچنین در الگوریتم **HLSFR** از پارامترهای $\xi = 0/05$ و $\gamma = 10^{-4}$ استفاده می‌کنیم. نتایج حاصل از روش گرادیان مزدوج ترکیبی را با الگوریتم‌های **CGD** (شیائو و همکارش، ۲۰۱۳)[1] و **IPBDF** (وان و همکارانش ۲۰۱۸)[2] مقایسه می‌کنیم و از چهار تصویر استاندارد P_1، P_2، P_3 و P_4 استفاده می‌کنیم. ابتدا این تصاویر را با نویز گاو سی تار کرده و سپس آن‌ها را با روش‌های **HLSFR**، **CGD** و **IPBDF** باز سازی می‌کنیم. همه کدها در محیط نرم‌افزار متلب 2017a و روی لپ‌تاپ سه‌هسته‌ای با ۴ گیگابایت حافظه اجرا شده‌اند. مقادیر **PSNR** برای این تصاویر به‌ازای مقادیر مختلف نویزهای گاوسی در جدول ۱ ارائه شده است که نشان می‌دهد مقدار **PSNR** برای الگوریتم **HLSFR** نسبت به روش‌های دیگر بیشتر است. لذا این روش نویز بیشتری از تصاویر رفع کرده است. تصاویر تار و بازسازی شده نیز در شکل ۱ نشان داده شده اند. . چون در هر اجرای الگوریتم نویزهای تولید شده به صورت داده‌های تصادفی هستند لذا هر الگوریتم را ۵ بار اجرا و میانگین زمان لازم برای رفع نویز گاوسی با اندازه ۶/۲۵ را در جدول ۲ ارائه کرده‌ایم.

[1] Xiao

[2] Wan

شکل ۱. تصاویر تار و بازسازی شده (از چپ به راست) ستون اول: تصاویر تار شده؛ ستون دوم: تصاویر بازسازی شده با الگوریتم CGD؛ ستون سوم: تصاویر بازسازی شده با الگوریتم IPBDF؛ ستون چهارم: تصاویر بازسازی شده با الگوریتم HLSFR.

جدول ۱. مقادیر PSNR به‌ازای نویزهای گاوسی مختلف

تصویر	مقدار نویز گاوسی	CGD	IPBDF	HLSFR
$P_{۱}$	۰/۱	۲۲/۸۴	۲۲/۹۵	۲۲/۹۷
$P_{۱}$	۱	۱۳/۵۹	۱۴/۵۵	۱۴/۳۴
$P_{۱}$	۴	۵/۱۴	۶/۵۱	۶/۶۸
$P_{۱}$	۶/۲۵	۱/۹۸	۳/۰۳	۳/۱۵
$P_{۲}$	۰/۱	۲۰/۸۲	۲۰/۹۵	۲۰/۹۸
$P_{۲}$	۱	۱۳/۴	۱۴/۲۸	۱۴/۰۸
$P_{۲}$	۴	۵	۶/۴۹	۶/۶۱
$P_{۲}$	۶/۲۵	۱/۷۵	۲/۸۹	۲/۹۹

۲۲/۷۷	۲۲/۷۴	۲۲/۶۲	۰/۱	$P_{۳}$
۱۴/۲۸	۱۴/۵۹	۱۳/۵۲	۱	$P_{۳}$
۶/۶۶	۶/۵۸	۵/۲۴	۴	$P_{۳}$
۲/۴	۲/۳	۱/۴۲	۶/۲۵	$P_{۳}$
۱۸/۶۵	۱۸/۶۱	۱۸/۵۲	۰/۱	$P_{۴}$
۱۳/۶۹	۱۳/۹۹	۱۳/۰۸	۱	$P_{۴}$
۶/۵۸	۶/۴۲	۵/۱	۴	$P_{۴}$
۲/۵۶	۲/۴۵	۱/۵۲	۶/۲۵	$P_{۴}$

جدول ۲. زمان لازم برای اجرای الگوریتم‌ها با نویز گاوسی ۶/۲۵

HLSFR	IPBDF	CGD	تصویر
۷/۶۵۰۰	۹/۰۲۸۵	۱۶/۵۳۴۲	$P_{۱}$
۶/۰۱۵۵	۶/۸۵۴۷	۱۳/۵۸۸۵	$P_{۲}$
۹/۱۱۵۲	۹/۲۹۱۷	۲۲/۵۴۵۲	$P_{۳}$
۱۴/۲۸۸۴	۱۵/۰۱۶۷	۳۴/۴۱۳۹	$P_{۴}$
۹/۲۶۷۳	۱۰/۰۴۷۹	۲۱/۷۷۰۵	میانگین

نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش گرادیان مزدوج برای حل معادلات غیرخطی با قیدهای محدب ارائه شده است که ترکیبی از روش‌های گرادیان مزدوج FR و LS می‌باشد. همگرایی سراسری این روش تحت برخی فرض‌های استاندارد ثابت شده است. همچنین مسأله سنجش فشرده برای رفع نویز و تاری تصاویر به صورت یک معادله غیرخطی مدل سازی می شود. بنابراین از الگوریتم گرادیان مزدوج ترکیبی می‌توان برای رفع تاری تصاویر استفاده کرد. نتایج عددی حاصل نشان می‌دهد که روش **HLSFR** در مقایسه با برخی روش‌های تکراری دیگر برای رفع تاری تصاویر کاراتر است.

References

Banham, M. R., & Katsaggelos, A. K. (۱۹۹۷). Digital image restoration. *IEEE signal processing magazine*, *۱۴*(۲), 24-41. https://doi.org:10.1109/79.581363

Dai, Y. H., & Yuan, Y. (۱۹۹۹). A nonlinear conjugate gradient method with a strong global convergence property. *SIAM Journal on optimization*, *۱۰*(۱), 177-182. https://doi:10.1137/S1052623497318992

Dennis, J. E. & Moré, J. J. (۱۹۷۴). A characterization of superlinear convergence and its application to quasi-Newton methods. *Mathematics of computation*, *۲۸*(۱۲۶), 549-560. https://doi.org/10.2307/2005926

Dennis Jr, J. E. & Schnabel, R. B. (۱۹۹۶). Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations, *SIAM*.
ISBN 0898713641, 9780898713640

Fletcher, R., & Reeves, C. M. (١٩٦٤). Function minimization by conjugate gradients. *The computer journal ٧(٢)*, 149-154. https://doi:10.1093/COMJNL/7.2.149

Gilbert, J. C., & Nocedal, J. (١٩٩٢). Global convergence properties of conjugate gradient methods for optimization. *SIAM Journal on optimization, ٢(١)*, 21-42. https://doi:10.1137/0802003

Hestenes, M. R. & Stiefel, E. (١٩٥٢). Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *Journal of research of the National Bureau of Standards, ٤٩(٦)*, 409-436. https://doi: 10.6028/jres.049.044

Hosseini, A. (٢٠٢٢). Multi-Objective Planning of Distributed Generation in the Electricity Network Considering the Interests of the Resource Investor and Network Operator. *Karafan Quarterly Scientific Journal ١٩(٣)*, 279-303. https://doi: 10.1109/ITOEC57671.2023.10291916

Liu, Y., & Storey, C. (١٩٩١). Efficient generalized conjugate gradient algorithms, part ١: theory. *Journal of optimization theory and applications* ٦٩, 129-137. https://doi.org/10.1007/BF00940464

Parsamanesh, M., Erfanian, M., &Ghorbani, M. (٢٠٢٢). A Spectral Parametric Iteration Method for Solving Volterra Population Model. *Karafan Quarterly Scientific Journal ١٩(Special Issue)*,619-633. https://doi:10.48301/kssa.2021.288686.1556

Qi, L. & Sun, J. (١٩٩٣). A nonsmooth version of Newton's method. *Mathematical programming ٥٨(٣- ١)*, 353-367. https://doi.org/10.1007/BF01581275

Wan, Z. (٢٠١٨). A modified spectral conjugate gradient projection method for signal recovery. *Signal, Image and Video Processing ١٢*, 1455-1462. https://doi:10.1007/s11760-018-1300-2

Xiao, Y. & Zhu, H. (٢٠١٣). A conjugate gradient method to solve convex constrained monotone equations with applications in compressive sensing. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, ٤٠٥(١)*, 310-319. https://doi:10.1016/j.jmaa.2013.04.017

Yamashita, N. & Fukushima, M. (٢٠٠١). On the rate of convergence of the Levenberg-Marquardt method. *Topics in Numerical Analysis: With Special Emphasis on Nonlinear Problems, Springer*. https://doi:10.1007/978-3-7091-6217-0-18