



Numerical investigation of pulsatile blood flow in a stenosed artery with magnetic field influence using a Crank–Nicolson

Ahmad Reza Haghighi ^{1*}, Ayatollah Yari ²

¹Department of Mathematics, Faculty of Statistics, Mathematics, and Computer, Allameh Tabataba'i University, Tehran, Iran.

²Department of Mathematics, Payame Noor University (PNU), Tehran, Iran.

ARTICLE INFO

Article Type:

Original Research

Received: 13.03.2024

Revised: 04.06.2024

Accepted: 14.08.2024

Keyword:

Pulsatile blood flow, Magnetic field, Body acceleration, Crank-Nicolson scheme

*Corresponding Author:

Ahmad Reza Haghighi

Email: ah.haghighi@gmail.com

ABSTRACT

In this study, a mathematical model for a two-dimensional pulsatile blood flow through a stenosed artery in the presence of a magnetic field and body acceleration is simulated. The artery is assumed to be an elastic cylindrical tube and stenosis's geometry is considered time-dependent to provide resemblance to the in-vivo situations. The blood flow has been assumed to be non-linear, incompressible, and fully developed. Moreover, due to the pulsatile pressure gradient arising from systematic functioning of the heart and the body acceleration, the blood flow has been assumed unsteady. To facilitate the application of the finite difference scheme in solving the governing equations, a coordinate transformation is employed, transforming the stenosed artery into a rectangular artery. The nonlinear momentum and the continuity equations under suitable initial and boundary conditions can be numerically solved using the Crank-Nicolson scheme. The blood flow characteristics such as the velocity profile, the volumetric flow rate, and the resistance to flow are obtained and the effects of the severity of the stenosis and the magnetic field on these flow characteristics are discussed. Besides the blood flow characteristics through elastic arteries have been compared with the rigid ones.

EXTENDED ABSTRACT

Introduction

The examination of blood flow through a stenosed artery, where the normal circulation is substantially disrupted, has garnered considerable attention from researchers. The exploration of fluid dynamics is pivotal in comprehending and addressing various cardiovascular diseases. Motivated by this, our study employs cylindrical polar coordinates, with the z -axis aligned to the tube's symmetry, and r and θ representing the radial and circumferential directions, respectively. In this context, we explore a dimensionless representation of a non-linear, incompressible, fully developed, pulsatile, and unsteady model characterizing blood flow:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\alpha^2} (h)^2 u + \frac{1}{\alpha^2} G(t), \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} \right). \quad (3)$$

The velocity components u and v represent flow along the axial and radial directions. This model encompasses distinctive features and advantages that enhance its realism in representing blood flow, including:

- I. In diseased conditions and arteries with small diameters, blood exhibits notable non-Newtonian properties. The model incorporates a non-Newtonian flow to accurately depict blood flow in such scenarios.
- II. In numerous everyday situations such as travel, vehicle operation, maritime travel, aviation, and dynamic physical activities in sports, the human body is frequently subjected to accelerations or vibrations. The model incorporates body acceleration through the term $G(t) = a_0 \cos(bt + \phi_g)$.
- III. Under normal physiological conditions, the transportation of blood in the human circulatory system relies entirely on the pulsatile pressure gradient generated by the pumping action of the heart. The model integrates pulsatile blood properties through the pressure gradient term $-\frac{\partial p}{\partial z} = A_0 + A_1 \cos \omega t$.
- IV. As blood is an electrically conducting fluid, it exhibits magnetohydrodynamic properties, potentially influencing health. Application of a magnetic field induces both electric and magnetic fields in the moving fluid. The model incorporates magnetic field properties into blood flow through the inclusion of the Hartmann number $h = B_0 R_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}}$.

The mathematical description of the time-dependent stenosis geometry is presented in dimensionless form as:

$$R(z, t) = \begin{cases} 1 - A[l_0^{n-1}(z-d) - (z-d)^n]a_1(t), & d \leq z \leq d + l_0, \\ a_1(t), & \text{O.W.} \end{cases}$$

It has been observed that in real-life situations, the development of a stenosis does not result in a symmetric shape. This paper addresses the current study by considering a non-symmetric geometry. Additionally, the mathematical model accounts for the flexibility of human arteries through the inclusion of the term $a_1(t)$. The inclusion of these two properties in the geometry of the stenosis constitutes distinctive features and advantages that contribute to the enhanced realism of the model.

To set boundary conditions in the artery's central core, we assume zero radial flow along the axis and a zero axial velocity gradient. Mathematically, these are stated as:

$$v(r, z, t) = 0, \quad \frac{\partial u(r, z, t)}{\partial r} = 0. \quad \text{The arterial wall conditions are } v(r, z, t) = \frac{\partial R}{\partial t}, \quad u(r, z, t) = 0,$$

and the initial conditions are $v(r, z, 0) = u(r, z, 0) = 0$.

Methodology

For the numerical investigation of the aforementioned system of equations using a finite difference scheme, a real non-symmetric artery is transformed into a rectangular computational domain using the coordinate transformation $\xi = r/R$. Following the coordinate transformation, the initial step involves calculating the radial velocity by multiplying the continuity equation by ξR and integrating over the domain (\cdot, ξ) . Following some straightforward mathematical manipulations, the formula for radial velocity is derived as

$$v(\xi, z, t) = \xi \left[\frac{\partial R}{\partial z} u + \frac{\partial R}{\partial t} (r - \xi^r) \right].$$

To compute the axial velocity, the finite difference scheme is applied. This involves discretizing the domain by

$$\left\{ \begin{array}{l} (\xi_j, z_i, t_k): \xi_j = (j-1)\Delta\xi, \quad \xi_{(N+1)} = 1, \quad z_i = (i-1)\Delta z, \quad t_k = (k-1)\Delta t; \\ j = 1, 2, \dots, N+1, \quad i = 1, 2, \dots, M+1, \quad k = 1, 2, \dots \end{array} \right\}.$$

Subsequently, the Crank-Nicolson finite difference method is used for all ξ -direction derivatives, central finite difference for z -direction derivatives, and forward difference approximation for the time derivative. This procedure results in the following formula for computing the axial velocity:

$$A_{i,j} u_{i,j-1}^{k+1} + B_{i,j} u_{i,j}^{k+1} + C_{i,j} u_{i,j+1}^{k+1} = D_{i,j}.$$

The coefficients $A_{i,j}, B_{i,j}, C_{i,j}, D_{i,j}$ are known values, which are determined at the k level. We also calculate the volumetric flow rate (Q) and the resistive impedance (Λ) of the blood flow by

$$Q_i^k = 2\pi(R_i^k)^2 \int_0^1 \xi_j(u)_{i,j}^k d\xi_j, \Lambda_i^k = \frac{\left| L \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_i^k \right|}{Q_i^k}.$$

Results and discussion

The numerical computations were implemented in the MATLAB programming language, utilizing input data available in scientific literature.

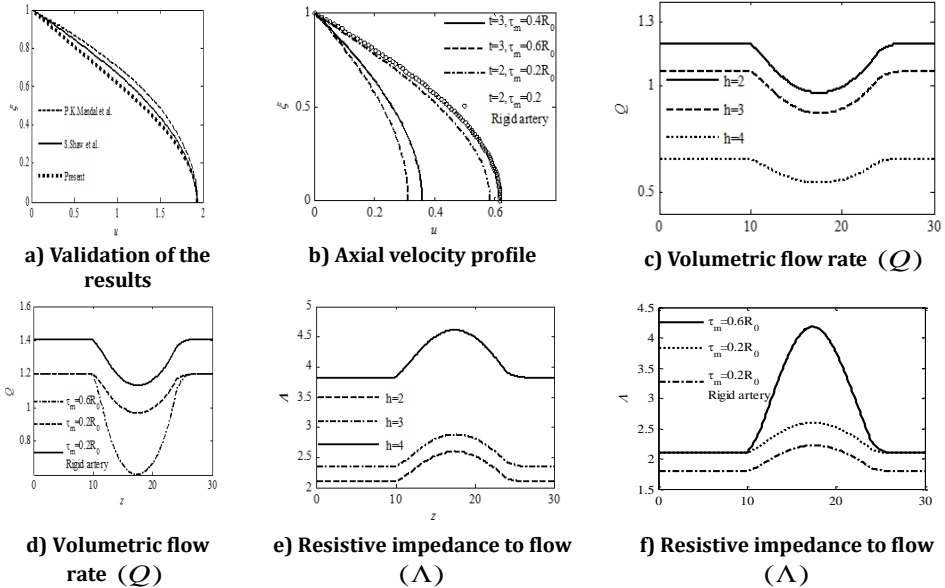


Figure 1. Graphical illustrations depicting the impact of various parameters related to artery shape and magnetic field on the characteristics of blood flow.

To validate our findings, Figure 1a illustrates the axial velocity values obtained through our presented Crank-Nicolson approach with those from [Shaw S., et al. (2010), The Open Transport Phenomena Journal, 1(1), 55-68] and [Mandal P., et al. (2007), Applied Mathematics and Computation, 189, 766-779]. Additionally, Figures 1b to 1f portray the axial velocity, volumetric flow rate, and resistive impedance of blood flow for various stenosis severities at different time points and for various Hartman numbers. These figures also compare the blood flow characteristics between rigid and elastic arteries. The pulsatile nature of blood flow is further explored in the paper.

Conclusion

In this study, a mathematical model simulates two-dimensional pulsatile blood flow through a stenosed artery influenced by a magnetic field and body acceleration. The artery is modeled as an elastic cylindrical tube with time-dependent stenosis geometry to mimic real-life scenarios. The blood flow, assumed non-linear and incompressible, exhibits unsteadiness due to pulsatile pressure gradient and body acceleration. To numerically solve, a coordinate transformation converts the stenosed artery into a rectangular form, and the Crank-Nicolson scheme is then applied to solve the nonlinear momentum equation. The study investigates blood flow characteristics, including velocity profiles, volumetric flow rates, and resistance to flow. The

impact of stenosis severity and magnetic field on these characteristics is discussed, and a comparison between elastic and rigid arteries is presented. The results obtained from the presented modeling indicate that an increase in stenosis severity leads to a reduction in axial velocity and volumetric flow rate, while the resistance to flow increases. The magnetic field exerts a diminishing effect on axial velocity. It was observed that an augmentation in the magnetic field results in a decrease in volumetric flow rate, suggesting the potential for controlling blood flow volume during surgical procedures.



بررسی عددی جریان خون پالسی در طول رگ گرفته شده با تأثیر میدان مغناطیسی با استفاده از تقریب کرانک-نیکلسون

احمد رضا حقیقی^{*۱}، آیت‌اله یاری^۲ 

۱- استاد، گروه ریاضی، دانشکده آمار، ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران.

۲- استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.

چکیده

اطلاعات مقاله

در این مقاله، یک مدل ریاضی برای جریان خون دوبعدی پالسی، در حضور میدان مغناطیسی و شتاب بدن در طول سرخرگ گرفته شده شبیه سازی شده است. با هدف شبیه سازی شرایط واقعی بدن انسان، سرخرگ مورد مطالعه به صورت الاستیک و هندسه گرفتگی وابسته به زمان مدل سازی می شود. جریان خون به صورت غیر خطی، تراکم ناپذیر و کاملاً گسترش یافته فرض شده است. همچنین به دلیل گرادبان فشار ضربانی ناشی از عملکرد سیستماتیک قلب و شتاب بدن، جریان خون به صورت ناپایا در نظر گرفته می شود. به منظور تسهیل در اعمال روش تفاضلات متناهی، با استفاده از تبدیل مختصات مناسب، سرخرگ الاستیک گرفته شده، به سرخرگ مستطیلی شکل تبدیل می شود. معادلات مومنوموم غیرخطی و پیوستگی با اعمال شرایط مرزی و شرایط اولیه مناسب به صورت عددی با استفاده از روش کرانک نیکلسون حل می شوند. مشخصه‌های اصلی جریان خون از جمله پروفیل سرعت، دبی حجمی و مقاومت در برابر جریان بدست آمده است و در مورد تأثیر میزان گرفتگی و میدان مغناطیسی بر روی آن‌ها بحث شده است. همچنین مشخصه‌های جریان خون در طول سرخرگ الاستیک و غیرالاستیک با همدیگر مقایسه می شوند.

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

دریافت مقاله: ۱۴۰۲/۱۲/۲۳

بازنگری مقاله: ۱۴۰۳/۰۳/۰۵

پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۰۵/۲۴

کلید واژگان:

جریان خون پالسی، میدان مغناطیسی، شتاب بدن، روش کرانک نیکلسون

*نویسنده مسئول: احمد رضا حقیقی

پست الکترونیکی:

Ah.haghighi@gmail.com



۱. مقدمه

تحقیقات نشان داده است که گرفتگی عروق موجب ناهنجاری در عملکرد سیستم قلبی-عروقی می شود، زیرا گرفتگی رگ مانع حرکت طبیعی جریان خون می شود. این اختلال در جریان خون، نقش مهمی در بیماری های قلبی عروقی دارد. بیماری های قلبی عروقی باعث مرگ بیش از ۱۷/۳ میلیون نفر در سال می باشند [۱، ۲]. خون سیالی است که از سوسپانسیون سلول های مختلفی مانند گلبول های قرمز، گلبول های سفید، لکوسیت ها و پلاکت ها در مایعی به نام پلاسما تشکیل شده است [۳، ۴]. پونالاکوسامی و اسلیو^۱، یک مدل ریاضی برای جریان خون در طول گرفتگی شریانی را به صورت دو لایه ای توسعه دادند، به طوری که لایه مرکزی مدل سیال کاسون و لایه جانبی سیال پلاسما می باشد. آن ها به این نتیجه رسیدند که مناطق پایین گرفتگی برای تشخیص بیماری های عروقی بهتر است [۵]. حقیقی و همکاران، جریان خون دو لایه ای پالسی و دو بعدی را در طول رگ الاستیک گرفته شده بررسی کرده اند به طوری که لایه مرکزی سیال میکروپولار است. آن ها با استفاده از روش تفاضل متناهی، معادلات حاکم بر جریان خون را حل کرده و در مورد تأثیر زاویه مخروطی، خاصیت ارتجاعی دیواره و میزان گرفتگی بروی مشخصه های جریان بحث کرده اند [۶].

زمانی که شخصی سوار وسایل نقلیه یا پرواز در هواپیما می باشد، جریان خون تحت تأثیر شتاب بدن به طور قابل توجهی تغییر می کند، زیرا جریان خون در یک محیط ارتعاشی قرار می گیرد و منجر به بروز مشکلاتی از جمله: از دست دادن بینایی، سردرد، افزایش میزان ضربان، خونریزی در صورت، گردن، ریه، مغز و شکم درد می شود. از این رو لی و سانکار^۲، جریان ضربانی خون در طول رگ گرفته شده با در نظر گرفتن سیال کاسون در ناحیه هسته و مدل سیال نیوتنی در لایه جانبی پلاسما تحت شتاب تناوبی بدن را مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند [۷]. همچنین شیت و روی^۳، جریان ضربانی، دو بعدی خون را در میان عروق گرفته شده تحت تأثیر شتاب تناوبی بدن بررسی کردند و نیز اثرات انتقال حرارت با ویسکوزیته ثابت خون را تجزیه و تحلیل نمودند [۸].

مارکوست و همکارانش^۴، به بررسی جریان پالسی خون در عروق انسان پرداختند که در بررسی آن ها جریان خون به صورت تراکم ناپذیر و متقارن و نیز رگ به صورت یک لوله راست در نظر گرفته شده که در آن اثر جریان ضربانی با اعمال پروفایل سرعت محاسبه شده است [۹]. حقیقی و شهبازی اصل، یک مدل ریاضی برای جریان خون پالسی، دو بعدی و دو لایه ای در طول رگ گرفته شده را شبیه سازی کردند. آن ها به بررسی میزان گرفتگی بروی مشخصه های اصلی جریان خون پرداخته اند. همچنین آن ها به منظور نشان دادن تأثیر خاصیت ارتجاعی دیواره رگ بر مشخصه های جریان خون، پروفیل سرعت جریان خون در طول رگ الاستیک و رگ غیر الاستیک را محاسبه کردند [۱۰]. لایک و مخوپادهیای^۵، جریان خون دو بعدی را به صورت سیال نیوتنی تراکم ناپذیر در نظر گرفتند، که در آن هندسه به صورت مستقل از زمان و جریان به صورت لایه ای فرض شده است [۱۱]. مندل^۶ جریان خون را به صورت تراکم ناپذیر غیر

^۱ Ponalagusamy & Tamil

^۲ Shankar & Lee

^۳ Shit & Roy

^۴ Marques, Oliveira, & Pinotti

^۵ Layek & Mukhopadhyay

^۶ Mandal

خطی، در طول رگ گرفته شده در نظر گرفت و به بررسی مشخصه‌های جریان خون پرداخت. او به این نتیجه رسید که فرض غیرالاستیک بودن دیواره رگ مناسب نبوده و باید دیواره رگ را به صورت الاستیک و وابسته به زمان در نظر گرفت [۱۲]. حقیقی و شهیازی اصل، شبیه سازی یک مدل دو بعدی و دو لایه‌ای از جریان خون غیر دائم در طول سرخرگ گرفته شده را با استفاده از روش تفاضل محدود انجام دادند که در آن نوع گرفتگی هندسه نسبت به جهت محوری، غیرمتقارن و نسبت به جهت شعاعی، متقارن در نظر گرفتند [۱۳].

میدان مغناطیسی کاربرد فراوانی در کنترل جریان خون را در زمان عمل جراحی دارد. در این راستا میسرا و همکارانش^۱ انواع رفتار جریان خون در عروق از جمله رفتار سیال نیوتنی و غیر نیوتنی را در حضور میدان مغناطیسی مورد مطالعه قرار دادند [۱۴-۱۶]. مخیمیر و همکارانش^۲، یک مدل ریاضی برای جریان خون در طول عروق الاستیک با گرفتگی‌های متعدد در حضور میدان مغناطیسی را بررسی و به خواص مکانیکی دیواره عروق به همراه ویژگی‌های جریان خون اشاره کردند [۱۷]. شیت^۳، یک مدل محاسباتی برای جریان خون، میدان مغناطیسی ارائه کرد که در این مدل او گزارش داد که هیچ اختلالات بالینی برای سلامت انسان، هنگامی که میدان مغناطیسی بیشتر از ۹ تسلا قرار نگیرد، مشاهده نشده است [۱۸]. الشار و همکاران^۴، شبیه سازی جریان ثابت از جریان خون در یک عروق متقارن گرفته شده را توسط رفتار مدل سیال غیر نیوتنی در حضور میدان مغناطیسی را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها در این مقاله رفتار نازک شدن برشی خون را تجزیه و تحلیل کردند [۱۹].

با توجه به گرادبان فشار ضربانی که توسط قلب تولید می‌شود، جریان خون در این تحقیق به صورت پالسی در نظر گرفته شده است. حقیقی و همکاران، جریان خون ضربانی دوبعدی را در طول سرخرگ مخروطی با دو گرفتگی متوالی با استفاده از روش تفاضل محدود حل کردند و تأثیرات پارامترهای موثر بر ویژگی‌های جریان را مورد بررسی قرار دادند [۲۰]. در این مطالعه بر خلاف مطالعات پیشین، جریان خون در حضور میدان مغناطیسی و شتاب بدن در نظر گرفته شده است و معادلات حاکم با استفاده از روش عددی کرانک نیکلسون حل شده‌اند و در مورد تأثیر میدان مغناطیسی و گرفتگی عروق بر روی مشخصه‌های جریان خون بحث شده است.

۲. فرمول بندی مسئله

۲-۱. هندسه گرفتگی

به منظور مدل سازی هندسه سرخرگ گرفته شده، مفروضات زیر در نظر گرفته شده اند: جریان خون به صورت دو بعدی، متقارن محور، لایه‌ای، ناپایا و کاملاً گسترش یافته در سرخرگ گرفته شده به طول L ، در نظر گرفته می‌شود. سیستم مختصات استوانه‌ای (r, θ, z) که به ترتیب بیانگر شعاع، زاویه و مختصات طولی رگ است را

^۱ Misra, Shit, Maiti & Roy

^۲ Mekheimer, Haroun & Elkot

^۳ Shit

^۴ Alshare, Tashtoush & El-Khalil

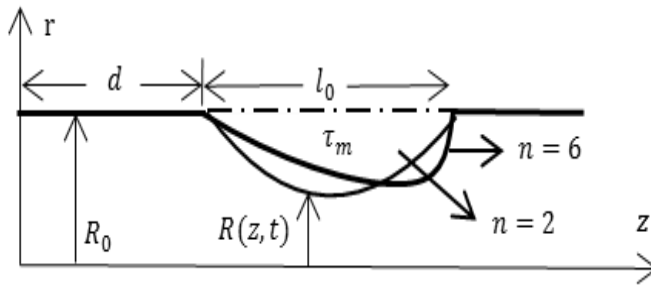
در نظر می گیریم. معادله ی توصیفی هندسه گرفتگی وابسته به زمان به صورت رابطه (۱) بیان می شود (شکل ۱) [۱۳، ۲۱-۲۳].

$$R(z,t) = \begin{cases} 1 - A[L_0^{n-1}(z-d) - (z-d)^n] a_1(t), & d \leq z \leq d+l_0 \\ a_1(t) & \text{O.W.} \end{cases} \quad (1)$$

که در آن $A = \frac{\tau_m}{R_0 L_0^n} \frac{n^{n(n-1)}}{(n-1)}$ شعاع رگ گرفته شده، R_0 شعاع رگ در ناحیه بدون گرفتگی، L ،

d و I_0 به ترتیب طول رگ مورد نظر، طول گرفتگی و طول ناحیه بالادست و τ_m حداکثر گرفتگی می باشد که در نقطه اتفاق $z = d + \frac{l_0}{n^{1/(n-1)}}$ می افتد. پارامتر $n \geq 2$ مربوط به نوع گرفتگی می باشد که

$n=2$ نشان دهنده متقارن بودن گرفتگی است. پارامتر زمانی $a_1(t)$ به صورت $a_1(t) = 1 + k_r \cos(\omega t - \phi)$ تعریف می شود که در آن ϕ زاویه فاز و k_r پارامتر نوسان می باشد. شکل (۱) هندسه گرفتگی رگ را به صورت شماتیک نشان می دهد.



شکل ۱. هندسه رگ گرفته شده

۲-۲. معادلات حاکم بر جریان خون

معادلات بی بعد ناویر-استوکس حاکم بر جریان خون در دستگاه مختصات استوانه ای به صورت زیر است: [۱۴، ۲۴-۲۷، ۲۰].

$$\frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\alpha^2} (h)^2 u + \frac{1}{\alpha^2} G(t), \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} \right). \quad (4)$$

پارامترهای بی بعد استفاده شده در معادلات (۲) تا (۴) به صورت زیر هستند:

$$u = \frac{u^*}{U}, \quad v = \frac{v^*}{U}, \quad r = \frac{r^*}{R_0}, \quad z = \frac{z^*}{R_0}, \quad t = \frac{t^* U}{R_0}, \quad d = \frac{d^*}{R_0}, \quad p = \frac{p^*}{\rho U^2}, \quad l_0 = \frac{l_0^*}{R_0}, \quad \text{Re} = \frac{\rho U R_0}{\mu},$$

u و v به ترتیب سرعت محوری و سرعت شعاعی، p فشار، ρ چگالی، μ ویسکوزیته سیال و U سرعت متوسط جریان ناپایا است. در معادلات (۴-۲) پارامترهای بی بعد، $\alpha^2 = \frac{UR_0}{\nu}$ پارامتر و مرسلی و $h = B_0 R_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}}$ عدد هارتمن اعمال شده‌اند (σ رسانایی الکتریکی و B_0 میدان مغناطیسی یکنواخت) [۲۴].

گرادیان فشار برای معادلات بالا به صورت زیر فرض می‌شود [۲۸-۳۳]:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = A_0 + A_1 \cos \omega t. \quad (۵)$$

که در آن A_0 دامنه ثابت گرادیان فشار، A_1 دامنه پالسی، $\omega = 2\pi f_p$ و f_p فرکانس پالسی است. شتاب بدن به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۴]:

$$G(t) = a_0 \cos(bt + \phi_g). \quad (۶)$$

که با استفاده از مقادیر بی بعد $a_0 = \frac{R_0 a_0^*}{\nu U}$ و $b = \frac{w_b}{w}$ که w_b (فرکانس شتاب بدن) و w (فرکانس شتاب مرجع) ϕ_g اختلاف فاز

شرایط مرزی و شرایط اولیه برای جریان خون به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۲۶]:

$$v(r, z, t) = 0, \quad \frac{\partial u(r, z, t)}{\partial r} = 0. \quad \text{مرکز رگ:}$$

$$v(r, z, t) = \frac{\partial R}{\partial t}, \quad u(r, z, t) = 0. \quad \text{دیواره رگ:}$$

$$v(r, z, 0) = u(r, z, 0) = 0.$$

به منظور بی حرکت و غیر الاستیک کردن دیواره سرخرگ مفروض، ابتدا تبدیل مختصات $\xi = \frac{r}{R}$ را روی معادلات حاکم بر جریان و شرایط مرزی و اولیه اعمال می‌کنیم [۴، ۳۴-۳۹]. با اعمال این تبدیل مختصات، دیواره سرخرگ به صورت غیر الاستیک و ثابت تبدیل شده و سرخرگ گرفته شده به سرخرگ مستطیلی شکل تبدیل می‌شود، تا بتوان معادلات حاکم بر چنین سرخرگی را با اعمال روش تفاضلات متناهی گسسته سازی کرد. نتیجه اعمال تبدیل مختصات روی معادلات حاکم و شرایط مرزی و اولیه به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \zeta} [\zeta (u \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial t}) - \nu] - u \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{1}{R^2} \{ 1 + (\zeta \frac{\partial R}{\partial z})^2 \} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \right] \quad (۷)$$

$$+ \frac{1}{\zeta R} \{ 1 + 2(\zeta \frac{\partial R}{\partial z})^2 - \zeta^2 R \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \} \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha^2} (h)^2 u + \frac{1}{\alpha^2} G(t),$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{v}{R\zeta} + \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\zeta}{R} \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial \zeta} = 0, \quad (۸)$$

$$\zeta = 0: \quad v(\zeta, z, t) = 0, \quad \frac{\partial u(\zeta, z, t)}{\partial \zeta} = 0. \quad (9)$$

$$\zeta = 1: \quad v(\zeta, z, t) = \frac{\partial R}{\partial t}, \quad u(\zeta, z, t) = 0. \quad (10)$$

$$v(\zeta, z, 0) = u(\zeta, z, 0) = 0. \quad (11)$$

۳. حل عددی معادلات حاکم بر جریان خون

۳-۱. انتگرال گیری از معادله پیوستگی

برای بدست آوردن سرعت شعاعی معادله پیوستگی (۸) را در R ضرب کرده و نسبت به ξ از بازه 0 تا ξ انتگرال می‌گیریم. سپس با استفاده از روش انتگرال گیری جزء به جزء داریم:

$$\xi v(\xi, z, t) + R \int_0^\xi \xi \frac{\partial u}{\partial z} d\xi - \frac{\partial R}{\partial z} \xi^2 u + \frac{\partial R}{\partial z} \int_0^\xi 2\xi u d\xi = 0. \quad (12)$$

با استفاده از شرط مرزی دیواره رگ رابطه (۱۲) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\int_0^1 \xi \frac{\partial u}{\partial z} d\xi = - \int_0^1 \frac{2}{R} \frac{\partial R}{\partial z} \xi u d\xi + \int_0^1 \frac{1}{R} \left(\frac{\partial R}{\partial t} \xi f(\xi) \right) d\xi. \quad (13)$$

که در آن $f(\xi)$ یک تابع دلخواه می‌باشد که رابطه $\int_0^\xi \xi f(\xi) d\xi = 1$ برقرار است. با انتخاب $f(\xi) = -4(1-\xi^2)$ و قرار دادن آن در رابطه (۱۳)، همچنین با توجه به هم‌ارزی انتگرال در دو طرف معادله (۱۲) بدست می‌آید:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{2}{R} \frac{\partial R}{\partial z} u - \frac{4}{R} (1-\xi^2) \frac{\partial R}{\partial t}. \quad (14)$$

با جایگذاری کردن رابطه (۱۴) در (۱۲) سرعت شعاعی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$v(\xi, z, t) = \xi \left[\frac{\partial R}{\partial z} u + \frac{\partial R}{\partial t} (2-\xi^2) \right]. \quad (15)$$

۳-۲. روش کرانک نیکلسون

برای بدست آوردن سرعت محوری از روش عددی کرانک نیکلسون استفاده می‌شود. این روش کرانک نیکلسون فرمول تقریب تفاضل مرکزی برای تقریب مشتقات مکانی و فرمول تقریب تفاضل پیشرو برای تقریب مشتق زمانی

استفاده می‌شود. مقدار u در (ξ_j, z_i, t_k) توسط $u_{i,j}^k$ نشان داده شده است. لذا تقریب مشتق مکانی و تقریب مشتق زمانی به صورت زیر است:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left[\frac{(u)_{i,j+1}^k - (u)_{i,j-1}^k}{2\Delta\xi} + \frac{(u)_{i,j+1}^{k+1} - (u)_{i,j-1}^{k+1}}{2\Delta\xi} \right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{(u)_{i+1,j}^k - (u)_{i-1,j}^k}{2\Delta z},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{(u)_{i,j+1}^k - 2(u)_{i,j}^k + (u)_{i,j-1}^k}{\Delta\xi^2} + \frac{(u)_{i,j+1}^{k+1} - 2(u)_{i,j}^{k+1} + (u)_{i,j-1}^{k+1}}{\Delta\xi^2} \right],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{(u)_{i+1,j}^k - 2(u)_{i,j}^k + (u)_{i-1,j}^k}{\Delta z^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{(u)_{i,j}^{k+1} - (u)_{i,j}^k}{\Delta t}.$$

$\Delta\xi$ و Δz و Δt به ترتیب طول گام‌های مربوط به جهت محوری، جهت شعاعی و جهت زمانی می‌باشد:

$$\begin{cases} \xi_j = (j-1)\Delta\xi, & j = 1, 2, \dots, N+1; \xi_{(N_c+1)} = 1 \\ z_i = (i-1)\Delta z, & i = 1, 2, \dots, M+1. \\ t_k = (k-1)\Delta t, & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

با استفاده از روش عددی کرانک نیکلسون برای گسسته سازی معادله (۷) دستگاه سه قطری به فرم زیر بدست

می‌آید:

$$A_{i,j} u_{i,j-1}^{k+1} + B_{i,j} u_{i,j}^{k+1} + C_{i,j} u_{i,j+1}^{k+1} = D_{i,j}, \quad (16)$$

$$A_{i,j} = \frac{\Delta t}{4R_i^k \Delta\xi} \left[\xi_j (u_{i,j} (\frac{\partial R}{\partial z})_i^k + (\frac{\partial R}{\partial t})_i^k) - v_{i,j} \right] - \frac{\Delta t}{2\alpha^2 (R_i^k)^2 \Delta\xi^2} \{ 1 + (\xi_j (\frac{\partial R}{\partial z})_i^k)^2 \} \\ + \frac{\Delta t}{4\alpha^2 (R_i^k)^2 \xi_j \Delta\xi} \{ 1 + 2(\xi_j (\frac{\partial R}{\partial z})_i^k)^2 - \xi_j^2 R_i^k (\frac{\partial^2 R}{\partial z^2})_i^k \},$$

$$B_{i,j} = 1 + \frac{\Delta t}{\alpha^2 (R_i^k)^2 \Delta\xi^2} \{ 1 + (\xi_j (\frac{\partial R}{\partial z})_i^k)^2 \},$$

$$C_{i,j} = \frac{-\Delta t}{4R_i^k \Delta\xi} \left[\xi_j (u_{i,j} (\frac{\partial R}{\partial z})_i^k + (\frac{\partial R}{\partial t})_i^k) - v_{i,j} \right] - \frac{\Delta t}{2\alpha^2 (R_i^k)^2 \Delta\xi^2} \{ 1 + (\xi_j (\frac{\partial R}{\partial z})_i^k)^2 \} \\ - \frac{\Delta t}{2\alpha^2 (R_i^k)^2 \xi_j \Delta\xi} \{ 1 + 2(\xi_j (\frac{\partial R}{\partial z})_i^k)^2 - \xi_j^2 R_i^k (\frac{\partial^2 R}{\partial z^2})_i^k \},$$

$$\begin{aligned}
 D_{i,j} = & u_{i,j}^k - \Delta t \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right) + \Delta t \left(\frac{G(t)}{\alpha} \right) - \Delta t \left(\frac{h^2}{\alpha} \right) u_{i,j} + \frac{\Delta t}{4R_i^k \Delta \xi} \left[\xi_j (u_{i,j} \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^k + \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)_i^k) - v_{i,j} \right] \\
 & ((u_{i,j+1}^k - (u_{i,j-1}^k) - \frac{\Delta t}{2\Delta z} (u_{i,j}^k ((u_{i+1,j}^k - (u_{i-1,j}^k) \\
 & + \frac{\Delta t}{2\alpha^2 (R_i^k)^2 \Delta \xi^2} ((u_{i,j+1}^k - 2(u_{i,j}^k + (u_{i,j-1}^k) \{1 + (\xi_j \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^k)^2\} \\
 & + \frac{\Delta t}{4\alpha^2 (R_i^k)^2 \xi_j \Delta \xi} \{1 + 2(\xi_j \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^k)^2 - \xi_j^2 R_i^k \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)_i^k\} ((u_{i,j+1}^k - (u_{i,j-1}^k) \\
 & + \frac{\Delta t}{\alpha^2 \Delta z^2} ((u_{i+1,j}^k - 2(u_{i,j}^k + (u_{i-1,j}^k)),
 \end{aligned}$$

نتیجه گسسته سازی روی شرایط اولیه و مرزی به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
 (v)_{i,1}^k &= (v)_{i,2}^k = 0, & (u)_{i,1}^k &= (u)_{i,2}^k, \\
 (u)_{i,N+1}^k &= 0, & (v)_{i,N+1}^k &= \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)_i^k, \\
 (u)_{i,j}^1 &= (v)_{i,j}^1 = 0.
 \end{aligned}$$

مقادیر بی بعد مربوط به دبی حجمی Q و مقاومت در برابر جریان Λ از روابط زیر بدست می آیند:

$$Q_i^k = 2\pi (R_i^k)^2 \int_0^1 \xi_j (u_{i,j}^k) d\xi_j, \quad (17)$$

$$\Lambda_i^k = \frac{\left| L \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_i^k \right|}{Q_i^k}. \quad (18)$$

۴. بحث‌ها و نتایج عددی

مدل سازی ارائه شده در نرم افزار MATLAB و با استفاده از پارامترهای بی بعد زیر انجام شده است [۱۳، ۲۶، ۳۶]

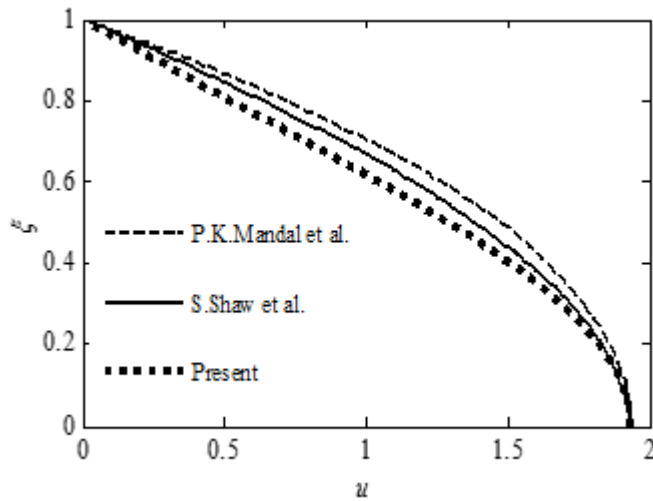
$$\Delta t = 0.001, \Delta \xi = 0.0125, \Delta z = 0.1, d = 10, \alpha = 4, A_0 = 0.1, A_1 = 0.2A_0, L = 30,$$

$$l_0 = 14, R_0 = 1.52, b = 1, \phi = 0, k_r = 0.05, a_0 = 1, \phi_g = \pi/4, h = 0, 2, 3, 4, 5$$

به منظور اعتبارسنجی نتایج بدست آمده، سرعت محوری برای جریان خون در رگ‌های گرفته شده از مطالعه‌های شاو و همکاران^۱ [۲۸]، و نیز مندل و همکاران^۲ [۳۴]، در شکل (۲) با سرعت محوری بدست آمده از مطالعه حاضر در بیشترین نقطه بحرانی گرفتگی و میزان گرفتگی $\tau_m = 0.2R_0$ و بدون در نظر گرفتن میدان مغناطیسی مورد مقایسه قرار گرفته است. در زمان $t = 2$ نتایج بدست آمده توافق قابل قبولی با هم دارند.

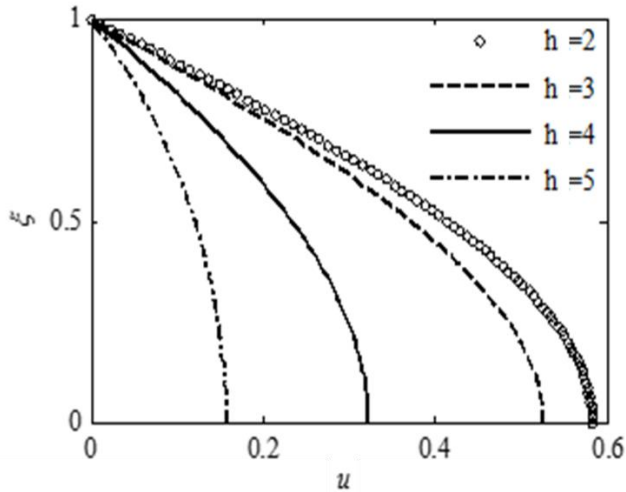
^۱ Shaw, Murthy & Pradhan

^۲ Mandal, Chakravarty, Mandal & Amin

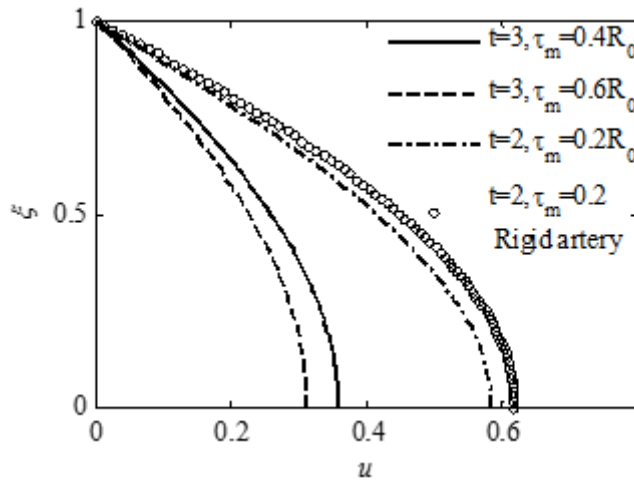


شکل ۲. مقایسه سرعت محوری بی بعد بدست آمده با نتایج [۲۸، ۳۴]

در شکل (۳) سرعت محوری جریان خون در رگ گرفته شده برای مقادیر مختلف عدد هارتمن در نقطه بحرانی گرفتگی ($z = 17$) و زمان $t = 2$ برای $\eta = 2$ و $\tau_m = 0.2R_0$ مورد مقایسه قرار گرفته است. با توجه به شکل (۳) سرعت محوری با افزایش عدد هارتمن کاهش می‌یابد، که این اتفاق ناشی از اثر متقابل میدان مغناطیسی با جریان خون می‌باشد، همچنین یک نیروی مقاومتی شناخته شده به نام نیروی لورنتس مطرح می‌شود که تمایل به کاهش سرعت حرکت خون را دارد و نیز بیشترین سرعت محوری در خط مرکزی رگ گرفته شده در هر چهار مورد از عدد هارتمن رخ می‌دهد. هنگامی که میدان مغناطیسی به جریان خون اعمال می‌شود، عمل مغناطیسی کردن بر روی ذرات خون حرکت دورانی ایجاد می‌کند و نیز ذرات مغناطیسی تحت تأثیر میدان مغناطیسی به چرخش در می‌آیند. این عمل باعث جهت‌گیری گلبول‌های قرمز خون شده و ذرات مغناطیسی بیشتری در پلاسما معلق می‌شوند، لذا ویسکوزیته خون افزایش می‌یابد. از این رو کاهش سرعت محوری را به دنبال خواهیم داشت. نمودار سرعت محوری بی بعد برای میزان گرفتگی‌های متفاوت در طول رگ الاستیک و غیر الاستیک را برای عدد هارتمن $h = 2$ و $\eta = 2$ در شکل (۴) نشان داده شده است. با توجه به شکل (۴)، با افزایش میزان گرفتگی در زمان $t = 3$ ، سرعت محوری کاهش می‌یابد. همچنین با مقایسه منحنی‌های مربوط به رگ الاستیک و غیر الاستیک در زمان $t = 3$ در شکل (۴) مشخص می‌شود که سرعت محوری در طول رگ غیر الاستیک بیشتر از سرعت محوری در طول رگ الاستیک است. این مسئله اهمیت فرض محرک بودن دیواره رگ الاستیک را نشان می‌دهد.

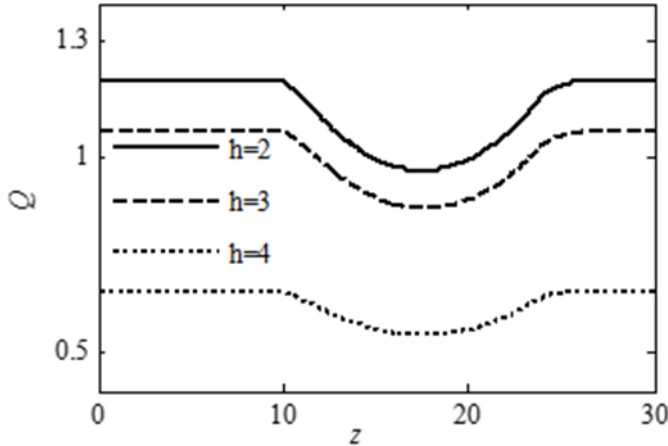


شکل ۳. سرعت محوری بی بعد برای مقادیر مختلف عدد هارتمن



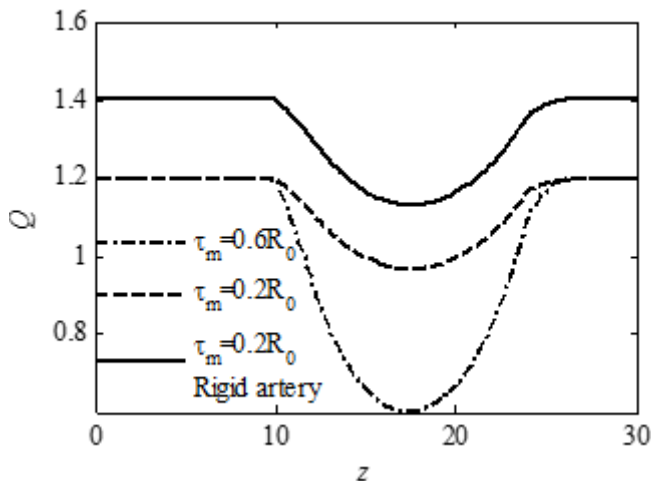
شکل ۴. سرعت محوری بی بعد برای میزان گرفتگی های مختلف

شکل (۵) رفتار دبی حجمی برای مقادیر مختلف عدد هارتمن را مورد مقایسه قرار می دهد. نمودار مربوط به دبی حجمی برای میزان گرفتگی $\tau_m = 0.2R_0$ و در زمان $t = 2$ برای $n = 2$ رسم شده است. با توجه به شکل (۵) با افزایش مقدار عدد هارتمن، دبی حجمی کاهش می یابد. بنابراین به این نتیجه می رسیم که با اعمال میدان مغناطیسی، می توان حجم جریان خون در طول عمل جراحی را کنترل کرد.



شکل ۵. توزیع دبی حجمی برای مقادیر مختلف عدد هارتمن

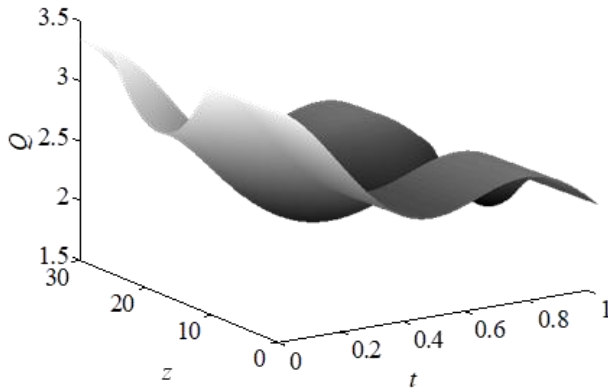
شکل (۶) بیانگر دبی حجمی برای میزان گرفتگی‌های متفاوت در طول رگ الاستیک و غیر الاستیک در زمان $t = 2$ و میدان مغناطیسی $h = 2$ و $n = 2$ می‌باشد. با توجه به شکل (۶)، واضح است که در طول رگ غیرالاستیک با افزایش میزان گرفتگی $\tau_m = 0.6R_0$, $\tau_m = 0.2R_0$ ، دبی حجمی کاهش می‌یابد و نیز دبی حجمی رگ الاستیک در مقایسه با دبی حجمی رگ غیر الاستیک با میزان گرفتگی یکسان $\tau_m = 0.2R_0$ ، مقدار کمتری دارد.



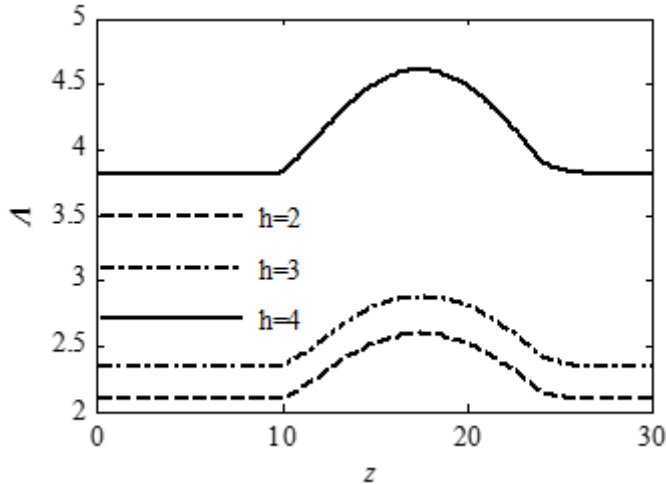
شکل ۶. توزیع دبی حجمی برای میزان گرفتگی‌های مختلف

همچنین شکل (۶) نشان می‌دهد که دبی حجمی رفتاری متناظر با هندسه در زمان $t = 2$ و میدان مغناطیسی $h = 2$ و $n = 2$ گرفتگی دارد به طوری که در شروع گرفتگی مقدار دبی حجمی کاهش یافته و در گرفتگی،

ارتفاع بحرانی به پایین ترین سطح خود می رسد، در واقع با افزایش میزان گرفتگی دبی حجمی کاهش پیدا می کند، لذا فرض الاستیک و غیر الاستیک رگ بسیار حائز اهمیت است. در شکل (۷) دبی حجمی به صورت سه بعدی در راستای طول سرخرگ برای گام زمانی $t = 1$ و میزان گرفتگی $\tau_m = 0.2R_0$ و $n = 2$ بدست آمده است. با توجه به شکل (۷) مقدار دبی حجمی با افزایش زمان کاهش پیدا کرده است.



شکل ۷. دبی حجمی سه بعدی

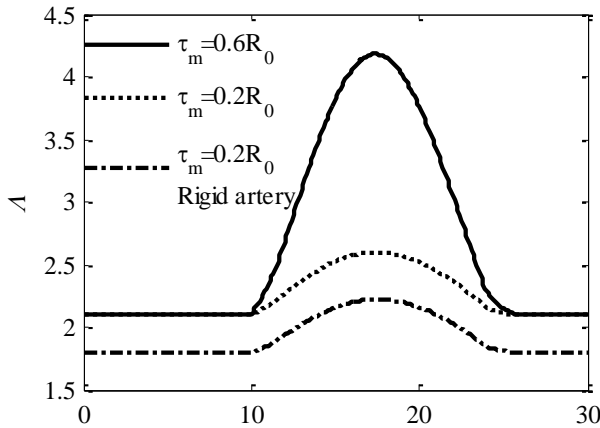


شکل ۸. توزیع مقاومت در برابر جریان برای مقادیر مختلف عدد هارتمن

در شکل (۸) مقاومت در برابر جریان برای مقادیر مختلف عدد هارتمن مورد مقایسه قرار گرفته شده است. نمودار مربوط به مقاومت در برابر جریان برای میزان گرفتگی $\tau_m = 0.2R_0$ برای $n = 2$ در زمان $t = 2$ می باشد. با توجه

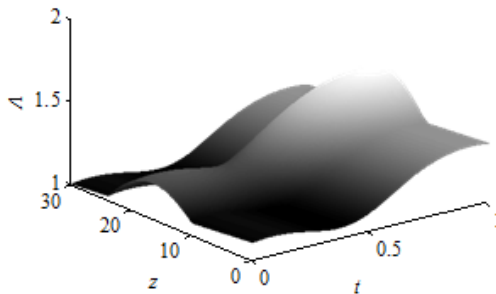
به رابطه دبی حجمی، مقدار دبی حجمی و مقاومت در برابر جریان با هم رابطه عکس دارند، لذا مقدار مقاومت در برابر جریان با افزایش عدد هارتمن افزایش می‌یابد.

در شکل (۹) مقاومت در برابر جریان برای میزان گرفتگی‌های متفاوت در طول رگ الاستیک و غیر الاستیک نشان داده شده است. با توجه به شکل (۹)، مقاومت در برابر جریان در زمان $t = 2$ برای $n = 2$ و عدد هارتمن $h = 2$ با افزایش میزان گرفتگی، افزایش می‌یابد و همچنین مقاومت در برابر جریان در زمان $t = 2$ و عدد هارتمن $h = 2$ برای رگ غیر الاستیک در مقایسه با رگ الاستیک با همان میزان گرفتگی، مقدار بالاتری دارد.



شکل ۹. توزیع مقاومت در برابر جریان برای میزان گرفتگی‌های مختلف

شکل (۱۰) نشانگر شکل سه بعدی مقاومت در برابر جریان در راستای طول سرخرگ است که در زمان $t = 1$ برای میزان گرفتگی $\tau_m = 0.2R_0$ و $n = 2$ بدست آمده است. با توجه به شکل (۱۰) برخلاف دبی حجمی، با افزایش زمان مقدار مقاومت در برابر جریان افزایش می‌یابد.



شکل ۱۰. مقاومت در برابر جریان سه بعدی

۵. نتیجه گیری

در تحقیق حاضر جریان خون دو بعدی، ناپایا و لایه‌ای در رگ مسدود شده وابسته به زمان مورد مطالعه قرار گرفته است. معادلات دیفرانسیل جزئی غیر خطی حاکم به روش عددی با استفاده از روش کرانک نیکلسون که یک روش ضمنی می‌باشد، حل شده‌اند و به دلیل پایدار بودن این روش، نیازی به محاسبه شرط پایداری نیست، و همچنین در مورد تأثیر پارامترهای موثر بر ویژگی‌های جریان خون همچون سرعت محوری، دبی حجمی و مقاومت در برابر جریان بحث شده است. نتایج بدست آمده از مدل سازی ارائه شده نشان می‌دهد که با افزایش میزان گرفتگی، مقدار سرعت محوری ودبی حجمی کاهش می‌یابد، ولی مقدار مقاومت در برابر جریان افزایش می‌یابد. میدان مغناطیسی بر روی سرعت محوری اثر کاهشی دارد. همچنین با افزایش میدان مغناطیسی، مشاهده می‌شود که دبی حجمی کاهش پیدا می‌کند، لذا می‌توان حجم جریان خون را در طول عمل جراحی کنترل کرد. به منظور نشان دادن تأثیر خاصیت ارتجاعی دیواره رگ بر مشخصه‌های جریان خون، پروفیل سرعت جریان خون در طول رگ الاستیک و رگ غیر الاستیک مقایسه شد و تفاوت بین مقادیر آن‌ها اهمیت الاستیک فرض کردن رگ خونی را به اثبات رساند.

References

- [1] Mendis, S., P. Puska, and Norrrving, B. (2011). *Global atlas on cardiovascular disease prevention and control*. World Health Organization. http://www.world-heart-federation.org/fileadmin/user_upload/
- [2] Mortazavinia, Z., A. Zare, and Mehdizadeh, A. (2012). *Effects of renal artery stenosis on realistic model of abdominal aorta and renal arteries incorporating fluid-structure interaction and pulsatile non-Newtonian blood flow*. *Applied Mathematics and Mechanics*, **33**(2): p. 165-176. <https://doi.org/10.1007/s10483-012-1541-6>
- [3] Dadvand, A. (2014). *Numerical simulation of the motion and deformation of red blood cell in viscous flow*. *Modares Mechanical Engineering*, **13**(11): p. 88-98. <https://doi.org/20.1001.1.10275940.1392.13.11.12.4>
- [4] Shahzad, M.H., et al. (2024)., *Entropy-based investigation of blood flow in elliptical multi-stenotic artery with hybrid nanofluid in a fuzzy environment: Applications as drug carriers for brain diseases*. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, **130**: p. 107695. <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2023.107695>
- [5] Ponalagusamy, R. and Selvi, R.T. (2011). *A study on two-layered model (Casson–Newtonian) for blood flow through an arterial stenosis: axially variable slip velocity at the wall*. *Journal of the Franklin Institute*, **348**(9): p. 2308-2321. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2011.06.020>
- [6] Haghghi, A.R., et al. (2016). *Numerical investigation of pulsatile blood flow in stenosed artery*. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, **2**(4): p. 649-662. <https://doi.org/10.1007/s40819-015-0084-0>
- [7] Sankar, D. and Lee U. (2011). *Nonlinear mathematical analysis for blood flow in a constricted artery under periodic body acceleration*. *Communications in Nonlinear*

- Science and Numerical Simulation, **16**(11): p. 4390-4402.
<https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2011.03.020>
- [8] Shit, G. and Roy, M. (2011). *Pulsatile flow and heat transfer of a magneto-micropolar fluid through a stenosed artery under the influence of body acceleration*. Journal of Mechanics in Medicine and Biology, **11**(03): p. 643-661.
<https://doi.org/10.1142/S0219519411003909>
- [9] Marques, P.F., et al. (2003). *Modeling and simulation of pulsatile blood flow with a physiologic wave pattern*. Artificial organs, **27**(5): p. 478-485.
<https://doi.org/10.1046/j.1525-1594.2003.07239.x>
- [10] Haghighi, A. and Shahbazi Asl, (2013). *A Mathematical modeling of a two layered blood flow through constricted vessels*. Journal of Advanced Mathematical Modeling, **3**(1): p. 79-99. https://jamm.scu.ac.ir/article_10562.html?lang=en
- [11] Mukhopadhyay, S. and Layek, G. (2008). *Numerical modeling of a stenosed artery using mathematical model of variable shape*. Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM), **3**(2): p. 11.
<https://digitalcommons.pvamu.edu/aam/vol3/iss2/11/>
- [12] Mandal, A.P. and Mandal, P.K. (2022). *Specific and nonspecific binding of drug eluted from a half-embedded stent in presence of atherosclerotic plaque*. Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering, **25**(8): p. 922-935.
<https://doi.org/10.1080/10255842.2021.1986813>
- [13] Haghighi, A.R. and Shahbazi Asl, M. (2015). *Numerical simulation of unsteady blood flow through an elastic artery with a non-symmetric stenosis*. Modares Mechanical Engineering, **14**(10). <https://doi.org/20.1001.1.10275940.1393.14.10.7.4>
- [14] Shit, G.C., et al. (2019). *Pulsatile flow and heat transfer of blood in an overlapping vibrating atherosclerotic artery: A numerical study*. Mathematics and Computers in Simulation, **166**: p. 432-450. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2019.06.015>
- [15] Misra, J., et al. (2011). *Hydromagnetic flow and heat transfer of a second-grade viscoelastic fluid in a channel with oscillatory stretching walls: application to the dynamics of blood flow*. Journal of Engineering Mathematics, **69**(1): p. 91-100.
<https://doi.org/10.1007/s10665-010-9376-x>
- [16] Misra, J., A. Sinha, and Shit, G. (2011). *Mathematical modeling of blood flow in a porous vessel having double stenoses in the presence of an external magnetic field*. International Journal of Biomathematics, **4**(02): p. 207-225.
<https://doi.org/10.1142/S1793524511001428>.
- [17] Mekheimer, K.S., Haroun, and Elkot, M. (2011). *Effects of magnetic field, porosity, and wall properties for anisotropically elastic multi-stenosis arteries on blood flow characteristics*. Applied Mathematics and Mechanics, **32**(8): p. 1047-1064. <https://doi.org/10.1007/s10483-011-1480-7>.
- [18] Shit, G.C. (2013). *Computational modelling of blood flow development and its characteristics in magnetic environment*. Modelling and Simulation in Engineering, **2013**(1): p. 758748. <https://doi.org/10.1155/2013/758748>.
- [19] Alshare, A., Tashtoush, B. and El-Khalil, H.H. (2013). *Computational modeling of non-newtonian blood flow through stenosed arteries in the presence of magnetic field*. Journal of Biomechanical Engineering, **135**(11): p. 114503.
<https://doi.org/10.1115/1.4025107>

- [20] Haghghi, A.R., M.S. Asl, and Kiyasatfar, M. (2015). *Mathematical modeling of unsteady blood flow through elastic tapered artery with overlapping stenosis*. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, **37**(2): p. 571-578. <https://doi.org/10.1007/s40430-014-0206-3>
- [21] Wajihah, S.A., Sankar, D. and Nagar, A.K. (2023). *Influence of thrombosis, stenosis and catheter on rheological characteristics of blood: a systematic review*. Archive of Applied Mechanics, **93**(12): p. 4279-4304. <https://doi.org/10.1007/s00419-023-02496-z>
- [22] Abdelwahab, A., et al. (2024). *Numerical simulation of electroosmotic force on micropolar pulsatile bloodstream through aneurysm and stenosis of carotid*. Waves in Random and Complex Media, **34**(5): p. 4288-4319. <https://doi.org/10.1080/17455030.2021.1989517>
- [23] Fahim, M., Sajid, M. and Ali, N. (2025). *Pulsatile pressure-driven non-Newtonian blood flow through a porous stenotic artery: a computational analysis*. Numerical Heat Transfer, Part A: Applications, **86**(15): p. 5140-5160. <https://doi.org/10.1080/10407782.2024.2326961>
- [24] Shit, G. and Majee, S. (2015). *Pulsatile flow of blood and heat transfer with variable viscosity under magnetic and vibration environment*. Journal of Magnetism and Magnetic Materials, **388**: p. 106-115. <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2015.04.026>
- [25] Liu, G.-T., et al. (2004). *Numerical study of pulsating flow through a tapered artery with stenosis*. Chinese Journal of Physics, **42**(4): p. 401-409. <https://doi.org/2004ChJPh..42..401L>
- [26] Ikbāl, M.A., Chakravarty, S. and Mandal, P.K. (2009). *Two-layered micropolar fluid flow through stenosed artery: Effect of peripheral layer thickness*. Computers & Mathematics with Applications, **58**(7): p. 1328-1339. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.07.023>
- [27] Deshpande, M., Giddens, D. and Mabon, R. (1976). *Steady laminar flow through modelled vascular stenoses*. Journal of Biomechanics, **9**(4): p. 165-174. [https://doi.org/10.1016/0021-9290\(76\)90001-4](https://doi.org/10.1016/0021-9290(76)90001-4)
- [28] Shaw, S., P. Murthy, and Pradhan, S. (2010). *The effect of body acceleration on two dimensional flow of Casson fluid through an artery with asymmetric stenosis*. Open Transport Phenomena Journal, **2**(1): p. 55-68. <https://doi.org/10.2174/1877729501002010055>
- [29] Abidin, S.N.A.M.Z., Jaafar, N.A. and Ismail, Z. (2022) *Herschel-Bulkley model of blood flow through an asymmetric stenosed artery on unsteady reactive solute dispersion*. MATEMATIKA, p. 1-20. <https://doi.org/10.11113/matematika.v38.n1.1390>
- [30] Ikbāl, M.A. and Mandal, P.K. (2023). *Mathematical Studies of non-Newtonian Blood Flow through a Patient-Specific Atherosclerotic Artery*. Journal of Applied Nonlinear Dynamics, **12**(03): p. 441-451. <https://doi.org/10.5890/JAND.2023.09.002>
- [31] Wajihah, S.A. and Sankar, D. (2023). *A review on non-Newtonian fluid models for multi-layered blood rheology in constricted arteries*. Archive of Applied Mechanics, **93**(5): p. 1771-1796. <https://doi.org/10.1007/s00419-023-02368-6>
- [32] Prakash, J. and Ogulu, A. (2007). *A study of pulsatile blood flow modeled as a power law fluid in a constricted tube*. International communications in heat and mass

- transfer, **34**(6): p. 762-768.
<https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2007.04.001>
- [33] Haghghi, A.R. and Pralhad, R. (2009). *Mathematical modelling of blood flows under the effects of body forces and magnetism on human body*. International Journal of Biomedical Engineering and Technology, **2**(4): p. 295-302.
<https://doi.org/10.1504/IJBET.2009.027794>
- [34] Mandal, P.K., et al. (2007). *Effect of body acceleration on unsteady pulsatile flow of non-Newtonian fluid through a stenosed artery*. Applied Mathematics and Computation, **189**(1): p. 766-779. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.11.139>
- [35] Haghghi, A.R., Pirhadi, N. and Shahbazi, A.M. (2019). *A Mathematical modeling for the study of blood flow as a cross fluid through a tapered artery*. Journal of New Researches in Mathematics, Vol.5, No. 20, pp.15-30,
<https://sanad.iau.ir/Journal/jnrm/Article/797831>
- [36] Mustapha, N., et al. (2009). *Unsteady magnetohydrodynamic blood flow through irregular multi-stenosed arteries*. Computers in Biology and Medicine, **39**(10): p. 896-906. <https://doi.org/10.1016/j.combiomed.2009.07.004>
- [37] Parsamanesh, M., Erfanian, M. and Ghorbani, A. (2022). *A Spectral Parametric Iteration Method for Solving Volterra Population Model*. Karafan Journal, **19**(Special Issue): p. 619-633. <https://doi.org/10.48301/kssa.2021.288686.1556>
- [38] Akhtar, S., Khan, M.N. and Sharaf, M. (2024). *Analysis of pulsatile flow of Rabinowitsch fluid in the multi-stenosed inclined artery under the influence of external body acceleration*. International Journal of Modern Physics B, **38**(29): p. 2450392.
<https://doi.org/10.1142/S0217979224503922>
- [39] Haghghi, A.R., Aliashrafi, N. and Asl, M.S. (2020). *An implicit approach to the micropolar fluid model of blood flow under the effect of body acceleration*. Mathematical Sciences, **14**(3): p. 269-277. <https://doi.org/10.1007/s40096-020-00340-x>