Karafan

Quarterly Scientific Journal of Technical and Vocational University

Autumn 2023, Vol. 20, No. 3, p. 419-442

Journal homepage: https://karafan.tvu.ac.ir/?lang=en

TVU

:10.48301/KSSA.2024.405697.2623

Original Research

E-ISSN: 2538-4430
ISSN: 2382-9796

Augmented Robust Model Predictive Control Design of a Rocket based on a Disturbance Observer

MohammadAli Mohammadkhani[1*]

[1]Department of Electrical Engineering, Technical and Vocational University (TVU), Tehran, and Iran.

ARTICLE INFO

Received: 07.13.2023
Revised: 11.16.2023
Accepted: 12.26.2023

Keyword:
Model Predictive Control
Robust
Observer
Rocket
Disturbance

[*]Corresponding Author:
Reza Moradi
Email:
mmohammadkhani@tvu.ac.ir

ABSTRACT

This paper presents a novel robust solution to the problem of model predictive control for a nonlinear, discrete-time rocket in the presence of finite disturbances. First, a mathematical model for the rocket in the state space was presented. Then, the basic equations of a typical six-Degree-of-Freedom airframe dynamics (6DoF) were separated as lateral and longitudinal dynamic equations. Linearization of these coupled dynamics was presented by using aerodynamic coefficients. Next, an augmented Model Predictive Control (MPC) was designed by using an observer to estimate states and disturbances, allowing the controller to reject disturbances. Application of the disturbance observer leads to the definition of a new state space and domain for MPC, which was considered in the present research. The predictive model control problem for the uncertain system was solved in finite time and online, and the decision variables were the initial states and disturbance estimations. Finally, the performance of the developed method was evaluated by simulation.

EXTENDED ABSTRACT

Introduction

Model predictive control (MPC) is a well-known method for controlling industrial systems with delays and constraints. In recent years, predictive model control methods have been developed for robotic, chemical, aerospace, and oil refinery applications. At each moment, the predictive controller has to solve a constrained optimization problem. The development of MPC methods and the significant progress of processors have made it possible to develop this method for aerospace applications. To apply the MPC method to a rocket, two main challenges of robustness and stability of the problem should be considered. In most predictive model methods, there is a strong dependence on the initial states, and in case of deviation from the considered positions, the control algorithm cannot be used. In recent years, modern techniques such as neural networks have been used in the improvement of predictive control based on nonlinear systems models. In these methods, it is assumed that the nonlinear system model is not available accurately and learning is used to remove the uncertain part of the system model. This paper considers the two main factors of robustness and applying observer for removing widespread application of Model Predictive Control in high-tech industries such as rockets. The main innovations of this research are the two items listed below:

- A complete model of a rocket is selected and is presented as the main system for implementing the robust model predictive controller.
- Applying the observer for the robust predictive model algorithm was developed. The system's model is considered an augmented model with disturbance. Predictive model calculations were developed for the new problem and finally, the performance and stability of the system were investigated along with simulations.

Methodology

This section presents the mathematical model for a rocket's autopilot. The basic equations of a typical six-Degree-of-Freedom (6DoF) were considered and separated as lateral and longitudinal dynamic equations.

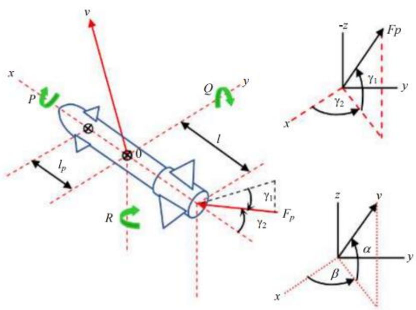


Figure 1. The forces acting on a rocket.

The decoupled 6DoF rocket's equations could be linearized and transformed into a state-space model by a computer program such as MATLAB. The linearized state space of the decoupled 6DoF equations in a generalized form is presented as follows.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n, u) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n, u) \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_1, \dots, x_n, u) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, u) \end{aligned} \tag{1}$$

This section transforms the model predictive control of a rocket in the presence of disturbance into a new problem with a higher order by augmenting disturbance dynamics.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x(t+1) \\ d(t+1) \end{bmatrix}}_{x_a(t+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & T_1 \\ 0 & A_d \end{bmatrix}}_{A_a} x_a(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_a} u(t), y(t) = \underbrace{[C \quad T_2]}_{C_a} x_a(t)$$

$$x_a(t+1) = A_a x_a(t) + B_a u(t), y(t) = C_a x(t) \tag{2}$$

$x(t)$, $u(t)$, $d(t)$ and $y(t)$ are the state, input, disturbance, and output vectors, respectively. For disturbance $e(t) \in E$ (the observer is stable and its error is bounded) and the discrete-time system $x_a(t+1) = f(x_a(t), d(t))$, the set Z is a disturbance-invariant set, if the relationship $f(x_a(t), e(t)) \in Z$ holds for all $x_a(t) \in Z$ and $e(t) \in E$. Z is a disturbance invariant set for the following additive system.

$$x_a(t+1) = A_K x_a(t) + e(t)$$

The system is controlled by the control law $x_a(t+1) = A_a x(t) + B_a u(t) + e(t)$. $\bar{x}_a(t+1) = A_a \bar{x}_a(t) + B_a \bar{u}(t)$ is considered as a nominal system without disturbance. If $x_a(t) \in \bar{x}_a(t) \oplus Z$ and $u(t) = \bar{u}(t) + K(x_a(t) - \bar{x}_a(t))$ holds, then

$$x_a(t+1) \in \bar{x}_a(t+1) \oplus Z \ \forall e(t) \in E$$

It states that the feedback law $u(t) = \bar{u}(t) + K(x_a(t) - \bar{x}_a(t))$ leads to maintaining the state $x(t)$ of the uncertain system $x_a(t+1) = A_K x_a(t) + B_a u(t) + e(t)$ becomes close to the state $\bar{x}_a(t)$ of the nominal system $x_a(t+1) = A_K x_a(t) + B_a u(t) + e(t)$ (for all $\bar{u}(.)$, $x_a(t) \in \bar{x}_a(t) \oplus Z$ if $x_a(0) \in \bar{x}_a(0) \oplus Z$). In the predictive model controller, the solution of the optimal control problem is used, in which the initial state of the nominal model is a decision variable. The predictive model control problem ($\mathbb{P}_N(x_a)$)) is a constrained optimization problem to find the optimal control sequence $\mathbf{u^0}$. The $\mathbb{P}_N(x_a)$ problem is:

$$V_N^0(x_a) = \min_u \{V_N(x_a, u) | \boldsymbol{u} \in U_N(x_a)\} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{u^0}(x_a) = \underset{u}{argmin} \{V_N(x_a, \boldsymbol{u}) | \boldsymbol{u} \in U_N(x_a)\} \tag{4}$$

The cost function $V_N(x_a)$ is defined as follows.

$$V_N(x_a, \boldsymbol{u}) \triangleq \Sigma_{i=0}^{N-1} \ell\big(x_a(i), u(i)\big) + V_f\big(x_a(N)\big). \tag{5}$$

For each i, $x_a(i) = \bar{\phi}_a(i; x_a, \mathbf{u})$ and $U_N(x)$ is a set of control sequences that satisfy all control constraints, state and final constraints as follows.

$$u(t) \in \overline{\mathbb{U}} \triangleq \mathbb{U} \ominus KZ,\ t \in \{0,1,..,N-1\} \tag{6}$$

$$x_a(t) \in \mathbb{X} \triangleq X \ominus Z,\ t \in \{0,1,..,N-1\} \tag{7}$$

$$x_N \in X_f \subset X \ominus Z,\ t \in \{0,1,..,N-1\} \tag{8}$$

X_f contains the final set of constraints for $\mathbb{P}_N(x_a)$. The explicit solution to the robust model predictive control of the uncertain system is:

$$\kappa_N^*(x_a(t)) \triangleq u_0^*(x_a(t)) + K(x_a(t) - x_0^*(x_a(t))) \tag{9}$$

We have shown that the set Z is asymptotically stable for the system $x_a(t+1) = Ax_a(t) + B\kappa_N^*(x_a(t)) + d$ with $d \in D$ and its region of attraction is X_N.

Results and discussion

The reduced order and linearized model of a racket is defined as follows.

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{q} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 14.7805 & 0 & 0.01958 \\ -100.858 & 1 & -0.1256 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ q \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3.4858 & 14.7805 \\ 20.42 & -94.8557 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_\eta \\ \alpha_w \end{bmatrix} + A_d d(t) \tag{10}$$

The constraints of states, disturbance bounds and variables of the MPC problem are defined in the current paper. The predictive model controller is calculated using Matlab R2020a software toolbox. The set Z satisfies the finite set constraint X_f as an approximation of the set. The results of a scenario of implementing the robust model predictive controller without applying the disturbance observer for the simulated rocket are shown in Figure 1. The same scenario was simulated for the method developed in this research and its results are presented in Figure 2. As it is clear in these diagrams, the performance of the robust predictive model control method guarantees invariance against the disturbance.

Conclusion

In this research, a robust predictive model control method was developed for high technology applications. For this purpose, the system model was linearized around the operating point, and then an augmented linear model of the system states and disturbance was considered. Next, the control relationships of the robust predictive model were developed for this system and the developed algorithm was applied to a rocket model. The results of the simulation showed that the application of the proposed method has an acceptable performance for complex systems.

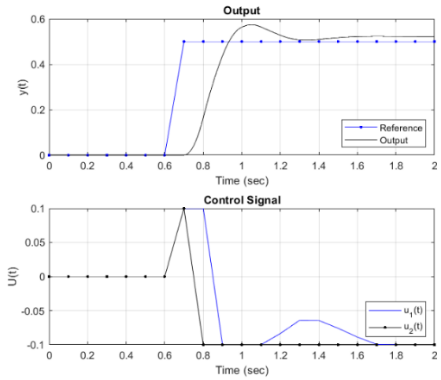


Figure 2. $y(t)$ and $ut(t)$ for a scenario of applying robust MPC without a disturbance observer.

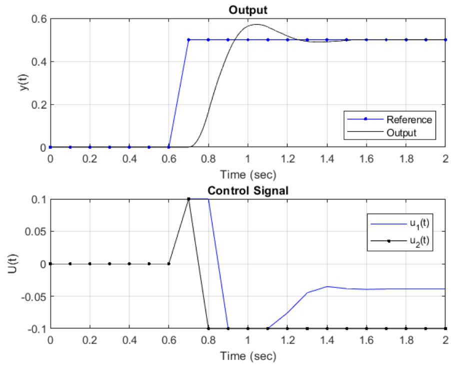


Figure 3. $y(t)$ and $u(t)$ for a scenario of applying robust MPC with a disturbance observer.

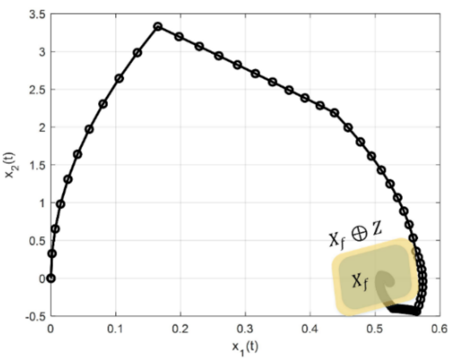


Figure 4. 2D projection of the trajectory ($x_1(t)$ and $x_2(t)$).

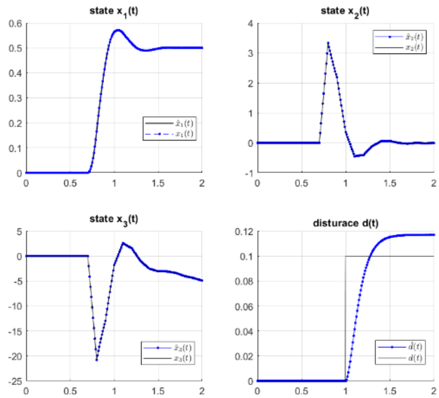


Figure 5. Estimation of states and disturbance.

کارافن
فصلنامه علمی دانشگاه فنی و حرفه‌ای
پاییز ۱۴۰۲، دوره ۲۰، شماره ۳، ۴۴۲-۴۱۹
آدرس نشریه: https://karafan.tvu.ac.ir/
doi:10.48301/KSSA.2024.405697.2623

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه فنی و حرفه‌ای

مقاله پژوهشی
شاپای الکترونیکی: ۲۵۳۸-۴۴۳۰
شاپای چاپی: ۲۳۸۲-۹۷۹۶

طراحی کنترل مدل افرونه پیش‌بین مقاوم یک راکت بر پایه رؤیت‌گر اغتشاش

محمدعلی محمدخانی[1*]

۱- گروه مهندسی برق، دانشگاه فنی و حرفه‌ای، تهران، ایران.

اطلاعات مقاله

دریافت مقاله: ۱۴۰۲/۰۴/۲۲
بازنگری مقاله: ۱۴۰۲/۰۸/۲۵
پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۱۰/۰۵

کلید واژگان:
کنترل مدل پیش‌بین
مقاوم
رؤیت‌گر
راکت
اغتشاش

***نویسنده مسئول:** محمدعلی محمدخانی
پست الکترونیکی:
mmohammadkhani@tvu.ac.ir

چکیده

این مقاله یک راه حل مقاوم جدید برای مسئله کنترل مدل پیش‌بین یک راکت غیر خطی و زمان گسسته در حضور اغتشاشات محدود ارائه می‌دهد. در ابتدا، یک مدل ریاضی برای راکت در فضای حالت ارائه می‌شود. معادلات شش درجه آزادی جفت شده غیرخطی به صورت معادلات دینامیکی جانبی و طولی جداسازی شده و با استفاده از ضرایب آیرودینامیکی و خطی کردن آن، یک مدل دقیق برای طراحی کنترل مدل پیش‌بین ارائه شده است. قانون کنترلی ارائه شده در این مقاله به صورت یک رابطه خطی از حالت‌ها و تخمین اغتشاش می‌باشد. به کارگیری رویت‌گر منجر به تعریف فضا و دامنه‌ی جدید برای حل مسئله می‌گردد که در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته است. مسئله کنترل مدل پیش‌بین برای سیستم نامعین در زمان محدود و برخط حل می‌شود و متغیر تصمیم در این مسئله حالت اولیه و تخمین اغتشاش است. در انتها، روش توسعه داده‌شده با شبیه‌سازی در نرم‌افزار ارزیابی می‌گردد.

مقدمه

کنترل مدل پیش‌بین (MPC)، روشی شناخته‌شده برای کنترل سیستم‌های صنعتی با تأخیر و محدودیت می‌باشد. در سال‌های اخیر، روش کنترل مدل پیش‌بین برای کاربردهای رباتیک، شیمیایی، هوافضا و پالایشگاه‌های نفت توسعه داده شده است. کنترل‌کننده پیش‌بین در هر لحظه نمونه‌برداری باید یک مسئله بهینه‌سازی را حل کند. در حالتی که هیچ قیدی مطرح نباشد و سیستم خطی باشد، این مسئله تبدیل به یک مسئله کنترل بهینه می‌شود. در این شرایط مسئله‌ای مهمی که مطرح است، امکان‌پذیری حل مسئله به‌صورت برخط است. زمانی این مسئله پیچیده‌تر می‌شود که قیود بر روی حالت، خروجی و سیگنال کنترلی در نظر گرفته شود. دهه ۹۰ میلادی اغلب روش‌های حل مسئله MPC شامل دو دسته کلی روش‌هایی مجموعه فعال و روش‌های نقطه داخلی بوده که با ابزارهای عددی تکرارپذیر زمان‌بر و پردازنده‌هایی حل می‌شد که کاربرد این روش را برای کاربردهای هوافضا محدود می‌کرد و به کاربردهای صنعتی محدود می‌شد. توسعه روش‌های MPC و پیشرفت چشمگیر پردازنده‌ها امکان توسعه این روش را برای اجسام پرنده فراهم نموده است. در [۱]، یک روش تحلیلی برای مسئله کنترل پیش‌بین در سال ۱۹۹۶ ارائه شده که در آن، با استفاده از ابزار نامساوی ماتریس خطی (LMI) یک مسئله کنترل پیش‌بین مقید حل شده‌است. خاصیت مقاوم بودن روش ارائه‌شده در این مرجع، منجر به توسعه و کاربرد گسترده آن شد. در این روش، نامعینی‌ها به‌صورت پارامتری و یا غیرپارامتری مدل‌سازی شده و قیود نیز منجر به ایجاد یک مسئله LMI می‌شوند. اما همچنان حجم محاسبات از موانع کاربرد گسترده این روش بود. در [۲] روشی ارائه شد تا LMIهای MPC به‌صورت برون‌خط حل شود و در حالت برخط استفاده شود. در این روش، مسئله کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل صریح برای مراکز بیضی‌گون‌های نامعینی حل می‌شود و پاسخ به‌صورت تقریبی از مراکز به دست می‌آید. مشکل اصلی این روش این است که خطای پاسخ تقریبی محدود نیست. در [۳]، روش حل تقریبی کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل سیستم‌های مقید با استفاده از LMI توسعه داده شد. در این روش ابتدا برای تضمین امکان‌پذیری مسئله برخی قیود سیستم آزاد می‌شوند و سپس با استفاده از پاسخ مسئله با قیدهای آزاد، پاسخی برای مسئله مقید تخمین زده می‌شود. لازم به ذکر است که در این روش‌ها احتمال تباهیدگی[1] در الگوریتم وجود دارد. با توسعه روش‌های حل تحلیلی و کاهش زمان به کارگیری برخط الگوریتم‌های MPC، به کارگیری آن در کاربردهای هوافضا مورد توجه محققین قرار گرفت. سال ۲۰۰۵، [۴] کنترل مدل پیش‌بین را به منظور تثبیت یک پرتابه در طول مسیر و در عین حال انجام محدودیت‌های فیزیکی آن طراحی کرد و نشان داد که چگونه مانورهای فرمان بسیار مؤثر در نتیجه بازخورد MPC به دست می‌آید. برای بکارگیری روش MPC برای یک راکت، باید دو چالش اصلی مقاومت و پایداری مسئله مورد توجه قرار گیرد. در [۵]، بهینه‌سازی بر روی سیگنال کنترلی با ارضای قیود و بر روی تعدادی محدود موقعیت مرجع انجام می‌گیرد و توالی سیگنال کنترلی برای موقعیت‌های مشخص‌شده، ذخیره می‌شوند. بنابراین در این روش وابستگی شدیدی به موقعیت سیگنال مرجع وجود دارد و در صورت انحراف از موقعیت‌های در نظر گرفته‌شده، الگوریتم کنترل قابل به‌کارگیری نیست. در [۶]، از شبکه عصبی در مقاوم‌سازی کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل سیستم‌های غیرخطی استفاده شده‌است. در این روش فرض شده‌است که مدل سیستم غیرخطی به‌صورت دقیق در دسترس نیست و از یادگیری برای حذف قسمت نامعین مدل سیستم استفاده شده‌است. با توجه به زمان‌بر بودن الگوریتم‌های شبکه عصبی، این روش با محدودیت‌هایی روبرو می‌باشد. نویسندگان [۷] یک روش کنترل پیش‌بین مبتنی بر مدل مقاوم برای سیستم‌های نامعین گسسته در زمان ارائه کرده‌اند.

[۸] استراتژی‌های هدایت و کنترل MPC را برای نسل بعدی وسایل نقلیه پرتاب مجدد ESA به کار برده و الگوریتم MPC را به صورت برخط برای صعود و همچنین فرود با قدرت استفاده نموده که ویژگی‌های فرود نقطه‌ای دقیق را ممکن ساخته است. اخیراً در [۹-۱۲] کنترل مدل پیش‌بین به صورت برخط برای سیستم‌های هدایت اجسام پرنده و

---

[1] Degeneracy

شبیه‌ساز دریایی توسعه داده شده است. با رشد و توسعه پردازنده‌ها امکان تلفیق ابزار داده‌کاوی و یادگیری با روش MPC فراهم شده است. نویسندگان [۱۳] با ترکیب یادگیری تقویتی (RL) و MPC، کنترل‌کننده‌ای بهینه و ایمن طراحی نموده‌اند [۱۴]. یک روش جدید مبتنی بر پیش‌بینی‌کننده‌های عصبی مبتنی بر داده در کنار کنترل مدل پیش‌بین برای مبدل‌های قدرت پیشنهاد می‌کند که هدف آن افزایش مقاومت و انعطاف‌پذیری است. هر چند ترکیب روش‌های مبتنی بر داده با روش مدل پیش‌بین برای سیستم‌های صنعتی در حال توسعه است، چالش اصلی به کارگیری روش مدل‌پیش عدم وجود سنسور برای تمامی متغیرهای سیستم است. به همین منظور در این مقاله دو عامل اصلی اغتشاش و نیاز به رویت‌گر محدودیت به کارگیری روش مدل پیش‌بین برای کاربرد آن در صنایع تکنولوژی بالا نظیر راکت در نظر گرفته شده است [۱۵]. استفاده از کنترل مدل پیش‌بین مقاوم در بسیاری از مراجع برای کاربردهای پیچیده نظیر راکت و اجسام پرنده مورد بررسی قرار گرفته است [۱۶; ۱۷]. در این مراجع عمدتا بر روی مقاومت روش نسبت به اغتشاشات و نویز تمرکز شده و مقاوم شدن الگوریتم کنترلی منجر به محافظه‌کاری در طراحی شده است [۱۸; ۱۹]. برای مقابله با محافظه‌کاری در طراحی و حفظ عملکرد سیستم کنترل، رویت‌گر اغتشاش در برخی دیگر از مراجع پیشنهاد شده است [۲۰; ۲۱]. در این مراجع عمدتا یک مدل شناخته شده برای اغتشاش در نظر گرفته شده است. با توجه به ماهیت اغتشاش، وجود خطا در تخمین اغتشاش در این دسته از الگوریتم‌های کنترلی اثرگذار است. از طرفی اثرگذاری همزمان اغتشاش و نامعینی در سیستم می‌تواند از حدود آستانه طراحی مقاوم بیشتر شده و منجر به ناپایداری گردد و یا محافظه‌کاری زیاد مانع عملکرد مطلوب و سریع سیستم می‌شود. در این مرجع تلاش شده که با تلفیق هر دو روش، از مزیت‌های هر دو روش استفاده شود و یک الگوریتم کارآمد برای کنترل مدل پیش‌بی ارائه شود. باید توجه داشت که تضمین پایداری و حل‌پذیری مسئله با فرض وجود نامعینی و به کارگیری رویت‌گر یک چالش مهم در این الگوریتم بوده که در الگوریتم توسعه داده شده در نظر گرفته شده است. عمده نوآوری‌های این مقاله در دو محور زیر انجام گرفته است.

- یک مدل کامل از یک راکت در [۲۲] انتخاب شده و به عنوان سیستم اصلی برای پیاده‌سازی الگوریتم کنترل مدل پیش‌بین مقاوم به همراه رویت‌گر آورده شده است.
- به‌کارگیری رویت‌گر برای الگوریتم مدل پیش‌بین مقاوم توسعه داده شده است. به این منظور، مدل سیستم به صورت یک مدل افزونه همراه اغتشاش در نظر گرفته شده و دینامیک رویت‌گر برای آن لحاظ گردیده است. روابط مدل پیش‌بین برای مسئله جدید توسعه یافته و در نهایت عملکرد و پایداری سیستم همراه با شبیه‌سازی مورد بررسی قرار گرفت.

مدل‌سازی راکت

مدل‌سازی حرکت راکت در این مقاله با استفاده از روابط [۲۲] می‌باشد. نیروهای یک راکت در شکل ۱ نشان داده شده است. روابط نیرو در شکل ۱ عبارت است از:

$$\dot{u} = \frac{F_{A_{x_b}} + F_{P_{x_b}} + F_{g_{x_b}}}{m} - (qw - rv), m/s^2$$

$$\dot{v} = \frac{F_{A_{y_b}} + F_{P_{y_b}} + F_{g_{y_b}}}{m} - (ru - pw), m/s^2 \qquad (۱)$$

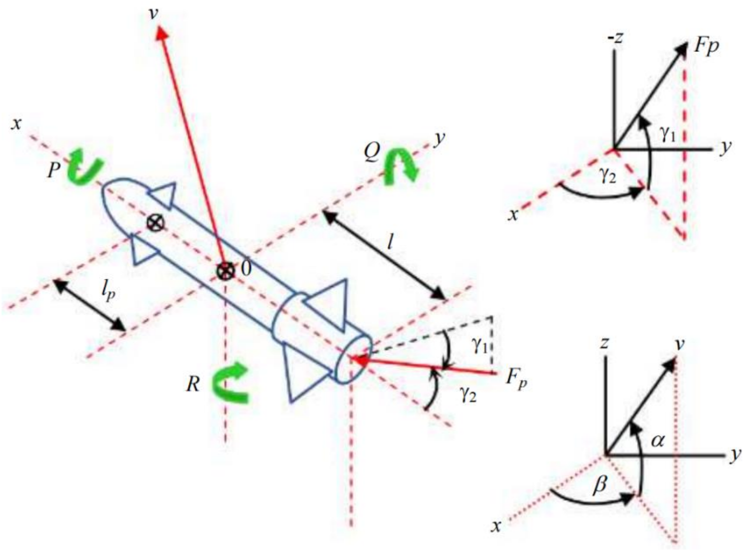
$$\dot{w} = \frac{F_{A_{z_b}} + F_{p_{z_b}} + F_{g_{z_b}}}{m} - (pv - qu), m/s^2$$

که در آن $F_{A_{x_b}}$، $F_{A_{y_b}}$ و $F_{A_{z_b}}$ بردارهای نیروی آیرودینامیکی بیان شده در سیستم مختصات بدنی (N_B) است. به همین ترتیب $F_{g_{x_b}}$، $F_{A_{g_b}}$ و $F_{g_{z_b}}$ بردارهای نیروی گرانشی و $F_{p_{x_b}}$، $F_{p_{g_b}}$ و $F_{p_{z_b}}$ بردارهای نیروی تراست در سیستم مختصات بدنی است. در رابطه فوق m، p، q و r به ترتیب به ترتیب جرم راکت (kg)، سرعت زاویه‌ای رول، پیچ و یاو[1] (rad/sec) می‌باشند. همچنین، r، u، v، w، $\dot{u}$، $\dot{v}$ و $\dot{w}$ به ترتیب سه درایه سرعت و سه درایه شتاب زاویه‌ای هستند. سرعت زاویه‌ای راکت با روابط زیر محاسبه می‌شود.

$$\dot{p} = \frac{L_A + L_P - qr\left(I_z - I_y\right)}{I_x}$$

$$\dot{q} = \frac{M_A + M_P - rp(I_x - I_z)}{I_y} \tag{۲}$$

$$\dot{r} = \frac{N_A + N_P - pq\left(I_y - I_x\right)}{I_z}$$



شکل ۱. نیروهای وارد شده به یک راکت [۱۴].

در رابطه (۲)، L_A، M_A و N_A به ترتیب ممان‌های رول، پیچ و یاو می‌باشند. به همین شکل، پارامترهای L_P، M_P ممان‌های احتراقی و همچنین I_x، I_y و I_z ممان‌های اینرسی هستند. لازم به ذکر است که مبنای تمامی محاسبات در دستگاه اینرسی است و از طرفی نیروها در دستگاه بدنی اعمال می‌شوند، از این رو لازم است که تبدیل نیرو از دستگاه اینرسی به دستگاه بدنی با تبدیل زیر انجام پذیرد.

---
[1] Angular rates of roll, pitch and yaw

$$\begin{bmatrix} F_{g_{x_b}} \\ F_{g_{y_b}} \\ F_{g_{z_b}} \end{bmatrix} = T_{b/e} \begin{bmatrix} F_{g_{x_e}} \\ F_{g_{y_e}} \\ F_{g_{z_e}} \end{bmatrix} \tag{۳}$$

ماتریس $T_{b/e}$ ماتریس تبدیل فضای اینرسی به بدنی است. در مرجع [۲۲] شتاب‌های بدنی $\dot{p}$، $\dot{q}$ و $\dot{r}$ در دستگاه بدنی بر اساس سایر پارامترهای دینامیکی و سنسورهای ژایرسکوب محاسبه شده است. زوایای اویلر با انتگرال‌گیری از نرخ زوایی اویلر بدست می‌آید و نرخ زوایای اویلر پیچ (θ)، رول (ϕ) و سای (ψ) عبارتند از:

$$\begin{gathered} \dot{\phi} = p + (qsin\phi + rcos\phi)tan\theta \\ \dot{\theta} = qcos\phi - rsin\phi \\ \dot{\psi} = \frac{qsin\phi + rcos\phi}{cos\theta} \end{gathered} \tag{۴}$$

[۲۲] برای بدست آورن نقطه تعادل، حالتی را در نظر گرفته که در آن تمامی سیگنال‌های کنترل باعث حرکت راکت در صفحه طولی مستقیم و هم سطح می‌شود. در این مدل‌سازی، مقادیر ورودی عبارتند از انحرافات سطح کنترل [۱]، تراست و ارتفاع. متغیرهای مرتبط با مدل‌سازی خطی حول نقطه تعادل را می توان به سه دسته متغیرهای هدف، کنترلی و وضعیت پرواز تقسیم کرد. متغیرهای هدف متغیرهایی هستند که باید به مقادیر مشخص‌شده هدایت شوند و شامل بردار دینامیک جانبی o_{la} و طولی o_{lo} زیر می‌باشند.

$$\begin{gathered} o_{la} = [\dot{v} \quad \dot{p} \quad \dot{r} \quad \beta]^T \\ o_{lo} = [\dot{u} \quad \dot{w} \quad \dot{q} \quad \alpha]^T \end{gathered} \tag{۵}$$

بنابراین یک مجموعه معادله غیرخطی به فرم (۶) حاصل می‌شود که معادلات خطی با استفاده از دستور trim نرم‌افزار متلب قابل محاسبه است.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n, u) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n, u) \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_1, \dots, x_n, u) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n, u) \end{aligned} \tag{۶}$$

با خطی‌سازی حول نقطه کار فرض می‌شود که سیستم غیرخطی فوق به صورت سیستم گسسته با نامعینی جمعی مدل می‌شود. در این مقاله فرض شده است که خطای خطی‌سازی و مدل‌سازی به صورت نامعینی جمعی می‌باشد. در بخش‌های بعدی از مدل رابطه (۶) برای طراحی کنترل‌کننده استفاده شده است.

[1] Control surface deflections

سیستم افزونه

بخشی از محاسبات کنترل پیش‌بین مربوط به محاسبات مربوط به پیش‌بینی حالت‌های آینده می‌باشد. باخطی‌سازی رابطه (۶)، می‌توان حالت‌های آینده سیستم را به‌صورت زیر تخمین زد.

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) + T_1 d, y(t) = Cx(t) + T_2 d(t) \quad (۷)$$

که در آن $x \in \mathbb{R}^N$ متغیرهای حالت سیستم، $u \in \mathbb{R}^m$ سیگنال کنترلی و $d \in \mathbb{D}^n$ اغتشاش و خطای خطی‌سازی (۶) است و فرض می‌شود که اغتشاش محدود، متغیرهای حالت و سیگنال کنترلی کراندار هستند.

$$x \in X, u \in U \quad (۸)$$

فضای $X \subset R^n$ و $U \subset R^m$ بسته، پیوسته و شامل مبدا می‌باشند. اغتشاش $d \in D \subset R^{n_d}$ کراندار، فضای D بسته و شامل مبدا است. $\mathbf{u}$ توالی کنترلی $\{u(0), u(1), \dots, u(N-1)\}$ و $\mathbf{d} = \{d(0), d(1), \dots, d(N-1)\}$ توالی اغتشاش است. پاسخ مسئله (۷) در زمان t با شرط اولیه $x(0)$، توالی‌های کنترلی $\mathbf{u}$ و $\mathbf{d}$ برابر $\phi(t; x, \mathbf{u}, \mathbf{d})$ است. فرض می‌شود که برای اغتشاش رویت‌گری طراحی شده و تخمین اغتشاش به حالت‌های سیستم و خروجی افزوده شده‌است.

$$d(t+1) = A_d d(t) \quad (۹)$$

R^{n_a} حالت سیستم افزونه است که شامل مبدا، فضای بسته و پیوسته است. سیستم افزونه را می‌توان با اغتشاش را به صورت زیر مدل‌سازی کرد.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x(t+1) \\ d(t+1) \end{bmatrix}}_{x_a(t+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & T_1 \\ 0 & A_d \end{bmatrix}}_{A_a} x_a(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_a} u, y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} C & T_2 \end{bmatrix}}_{C_a} x_a(t) \quad (۱۰)$$

بنابراین مسئله کنترل مدل‌پیش بین با وجود اغتشاش با فرض داشتن دینامیک اغتشاش به یک مسئله جدید با مرتبه بالاتر تبدیل می‌شود. باید توجه داشت که چالش اصلی در مسئله جدید وجود خطای اغتشاش و دینامیک رویت‌گر است. در این مقاله تلاش شده است که با وجود خطا و دینامیک رویت‌گر حل‌پذیری مسئله بررسی و قانون کنترل بهینه ارائه گردد. سیستم نامی و مرجع (بدون خطای رویت‌گر) به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$x_a(t+1) = A_a x_a(t) + B_a u(t), y(t) = C_a x(t) \quad (۱۱)$$

فرض می‌شود که $\overline{\phi}_a(t; x_a, \mathbf{u})$ بیانگر راه‌حل مسئله نامی رابط (۱۱) در زمان t با شرط اولیه $x_a(0)$ و توالی کنترلی $\mathbf{u}$ است. همچنین فرض می‌شود که $K \in \mathbb{R}^{m \times (n+n_d)}$ به گونه‌ای است که $A_k \triangleq A_a + B_a K$ پایدار است. بهره‌های رویت‌گر سیستم افزونه L_d و L_x در نظر گرفته می‌شوند.

$$\hat{x}_a(t+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} A + L_x C & T_1 + L_x T_2 \\ L_d C & A_d + L_d T_2 \end{bmatrix}}_{A_e} x + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) - \begin{bmatrix} L_x \\ L_d \end{bmatrix} y(t) \tag{۱۲}$$

شرط لازم برای طراحی رویت‌گر (۱۲) این است که سیستم افزونه رویت‌پذیر باشد. در مرجع [۲۳] شرط لازم و یک روش بهینه برای طراحی رویت‌گر به همراه حد بالای خطای تخمین ارائه شده است. فرض می‌شود که خطای تخمین سیستم افزونه $e(t)$ می‌باشد. در صورتی که $e_d(t)$ خطای تخمین اغتشاشات و $e_x(t)$ خطای تخمین حالت‌ها باشد. دینامیک رویتگر به شکل زیر قابل نوشتن است:

$$e(t+1) = A_e e(t), e(t) = \begin{bmatrix} e_x(t) \\ e_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) - \hat{x}(t) \\ d(t) - \hat{d}(t) \end{bmatrix}, A_e = \begin{bmatrix} A + L_x C & T_1 + L_x T_2 \\ L_d C & A_d + L_d T_2 \end{bmatrix}$$

کنترل مدل پیش‌بین مقاوم سیستم افزونه

اثبات پایداری روش کنترل توسعه داده شده در این مقاله بر پایه روش [۲۴] است. Z مجموعه تغییرناپذیر در برابر اغتشاش[۱] برای سیستم نامعین کنترل‌شده $x_a(t+1) = A_k x_a(t) + e(t)$ می‌باشد. برای اثبات پایداری مقاوم لازم است که مفهوم مجموعه تغییرناپذیر در برابر اغتشاش تعریف شود. برای اغتشاش $e(t) \in E$ (رویت‌گر پایدار و خطای آن کراندار است) و سیستم زمان گسسته $x_a(t+1) = f(x_a(t), d(t))$، مجموعه Z یک مجموعه تغییرناپذیر در برابر اغتشاش است، اگر رابطه $f(x_a(t), e(t)) \in Z$ برای همه $x_a(t) \in Z$ و $e(t) \in E$ برقرار باشد. بنابراین

$$A_k Z \oplus E \subseteq Z \tag{۱۳}$$

در رابطه (۱۳) $\oplus$ عمگر جمع متقارن۲ است (جمع متقارن دو مجموعه A و B به صورت $\mathrm{A} \oplus \mathrm{B} = \{a + b | a \in \mathrm{A}, b \in \mathrm{B}\}$ تعریف می‌شود). به منظور کاهش محافظه‌کاری لازم است که مجموعه Z تا حد امکان کوچک در نظر گرفته شود. مجموعه تغییرناپذیر اغتشاشات به صورت $\Sigma_{i=0}^{\infty} A_k^i E$ در نظر گرفته می‌شود و حاصل آن لزوما به صورت چندوجهی نیست.

- **لم ۱:** فرض می‌شود که Z مجموعه‌ای اغتشاشات تغییرناپذیر برای سیستم افزونه زیر می‌باشد.

$$x_a(t+1) = A_K x_a(t) + e(t)$$

سیستم با معادله فضای حالت $x_a(t+1) = A_a x(t) + B_a u(t) + e(t)$ تحت کنترل است. همچنین سیستم $\bar{x}_a(t+1) = A_a \bar{x}_a(t) + B_a \bar{u}(t)$ به عنوان سیستم بدون اغتشاش و نامی در نظر گرفته می‌شود. اگر $x_a(t) \in \bar{x}_a(t) \oplus Z$ و $u(t) = \bar{u}(t) + K(x_a(t) - \bar{x}_a(t))$ برقرار باشد، آنگاه $x_a(t+1) \in \bar{x}_a(t+1) \oplus Z$ برای $e(t) \in E$ با روابط و برقرار است.

لم ۱ بیان می‌کند که قانون فیدبک $u(t) = \bar{u}(t) + K(x_a(t) - \bar{x}_a(t))$ منجر به حفظ حالت $x(t)$ از سیستم نامعین $x_a(t+1) = A_K x_a(t) + B_a u(t) + e(t)$ نزدیک به حالت $\bar{x}_a(t)$ سیستم نامی $\bar{x}_a(t+1) = A\bar{x}_a(t) + B\bar{u}(t)$ می‌شود (برای تمامی $\bar{u}(.)$، $x_a(t) \in \bar{x}_a(t) \oplus Z$ اگر $x_a(0) \in \bar{x}_a(0) \oplus Z$). در کنترل‌کننده مدل پیش‌بین، از راه‌حل مسئله کنترل بهینه استفاده می‌شود که در آن حالت اولیه مدل نامی یک

[۱] Disturbance invariant
[۲] Symmetric add

متغیر تصمیم‌گیری است. مسئله کنترل مدل پیش‌بین ($(\mathbb{P}_N(x_a)$) یک مسئله بهینه‌سازی مقید برای یافتن توالی بهینه کنترلی $\mathbf{u^o}$ است. مسئله $\mathbb{P}_N(x_a)$ به صورت زیر است.

$$V_N^0(x_a) = \min_u \{V_N(x_a, u) | \boldsymbol{u} \in U_N(x_a)\} \tag{۱۴}$$

$$\boldsymbol{u^o}(x_a) = \underset{u}{argmin}\{V_N(x_a, \boldsymbol{u}) | \boldsymbol{u} \in U_N(x_a)\} \tag{۱۵}$$

در (۱۵)، تابع هزینه $V_N(x_a)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$V_N(x_a, \boldsymbol{u}) \triangleq \Sigma_{i=0}^{N-1} \ell\big(x_a(i), u(i)\big) + V_f\big(x_a(N)\big). \tag{۱۶}$$

برای هر i، $x_a(i) = \overline{\phi}_a(i; x_a, \mathbf{u})$ و $U_N(x)$ مجموعه‌ای از توالی‌های کنترلی است که تمامی قیود کنترلی، حالت و قیود نهایی را ارضا می‌کند. بنابراین، $U_N(x_a)$ شامل توالی‌های کنترلی است که سه مجموعه قیود زیر را ارضا کنند.

$$u(t) \in \overline{\mathbb{U}} \triangleq \mathbb{U} \ominus KZ, \qquad t \in \{0,1,..,N-1\} \tag{۱۷}$$

$$x_a(t) \in \mathbb{X} \triangleq X \ominus Z, \qquad t \in \{0,1,..,N-1\} \tag{۱۸}$$

$$x_N \in X_f \subset X \ominus Z, \qquad t \in \{0,1,..,N-1\} \tag{۱۹}$$

عملگر $\ominus$ در روابط بالا تفاضل متقارن[1] است و برای دو مجموعه A و B با روابط ریاضی زیر تعریف می‌شود.

$$\mathrm{A} \ominus \mathrm{B} \triangleq \{a | a \oplus \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}\}$$

X_f شامل مجموعه قیود نهایی برای $\mathbb{P}_N(x_a)$ است. مجموعه $U_N(x)$ به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$U_N(x_a) = \{\boldsymbol{u} | u(i) \in \overline{\mathbb{U}}, \bar{\phi}_a(i; x_a, u) \in \overline{\mathbb{X}}, \forall i \in \{0,1,..,N-1\}, \bar{\phi}(N; x, u) \in X_f \tag{۲۰}$$

$\overline{X}_N$ دامنه تابع هزینه $V_N^0(.)$ و برابر است با

$$\bar{X}_N \triangleq \{x_a | U_N(x_a) \neq \emptyset \tag{۲۱}$$

فرض شده است که D به اندازه‌ی کافی کوچک است که Z زیرمجموعه‌ای از داخلی $\mathbb{X}$ و KZ عضو داخلی $\mathbb{U}$ است. همچنین فرض شده است که

$$l(x_a, u) \triangleq \frac{1}{2}[x_a' Q x_a + u' R u], V_f(x_a) \triangleq \frac{1}{2} x_a' P x_a \tag{۲۲}$$

[1] Symmetric difference

که در آن Q، R و P توابع مثبت معین هستند که هزینه نهایی و قیود نهایی آن به ترتیب V_f و X_f است.

$$A_K X_f \subset X_f, X_f \subset \mathbb{X} \ominus Z, KX_f \subset \mathbb{U} \ominus KZ,$$

$$V_f(A_k x_a) + l(x_a, Kx_a) \leq V_f(x_a) \forall x_a \in X_f$$

پاسخ مسئله $P_N(x_a)$ توالی کنترلی $u^o(x) \triangleq \{u_0^0(x_a), u_1^0(x_a), \dots, u_{N-1}^0(x_a)\}$ و همچنین توالی حالت‌های $x_0^0(x_a) = \{x_0^0(x_a), x_1^0(x_a), \dots, x_{N-1}^0(x_a)\}$، $x_0^0(x_a) \triangleq x$ که در آن برای هر i عبارت $x_i^0 \triangleq \overline{\phi}_a(i; x_a, u^0(x_a))$ برقرار است. بنابراین

$$\kappa_N^0(x_a(t)) \triangleq u_0^0(x_a(t)) \tag{۲۳}$$

بنابراین سیستم تحت قانون کنترل بهینه عبارت است از:

$$x_a(t+1) = Ax_a(t) + B\kappa_N^0(x_a(t)) \tag{۲۴}$$

قانون کنترل فوق ارضای قیود را برای هر حالت اولیه در X_N تضمین و سیستم را پایدار می‌کند. همچنین تابع هزینه در شرط زیر صدق می‌کند.

$$V_N^0\big(Ax_a(t) + B\kappa_N^0(x_a(t))\big) \leq V_N^0 - l(x, \kappa_N^0(x_a(t))) \tag{۲۵}$$

در [۲۵] اثبات شده است که $c_2 > c_1 > 0$ به گونه‌ای وجود دارد که

$$c_1|x|^2 \leq V_N^0(x_a(t)), \forall x_a(t) \in \bar{X}_N, \tag{۲۶}$$

$$V_N^0(x_a(t+1)) \leq V_N^0(x_a(t)) - c_1|x_a(t)|^2, \forall x \in \bar{X}_N, \tag{۲۷}$$

$$V_N^0(x_a(t)) \leq c_2|x_a(t)|^2, \forall x_a(t) \in \bar{X}_f \tag{۲۸}$$

با فرض کراندار بودن X_N، مبدا برای سیستم $x_a(t+1) = Ax_a(t) + B\kappa_N^0(x_a(t))$ با ناحیه جذب $\overline{X}_N$ پایدار مجانبی است. برای هر $x_a(t) \in \bar{X}_N \backslash Z$ لازم نیست که $V_N^0(Ax_a(t) + B\kappa_N^0(x_a(t)) + w)$ کوچکتر از $V_N^0(x_a(t))$ برای هر $w \in W$ باشد. بنابراین، برای تضمین پایداری مجانبی مقاوم Z پیشنهاد می‌شود که مسئله بهینه‌سازی بر اساس شرایط اولیه x_0 به صورت برخط حل گردد. مسئله کنترل مدل پیش‌بین مقاوم $\mathbb{P}_N^*$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$V_N^*(x_a(t)) = \min_{u, x_0}\{V_N(x_a(0), \boldsymbol{u}) | \boldsymbol{u} \in U_N(x_a(0)), x \in x_a(0) \oplus Z\} \tag{۲۹}$$

$$(x_a^*(0), \boldsymbol{u}^*(x)) = \underset{x_0, \boldsymbol{u}}{argmin}\{V_N(x_a(0), \boldsymbol{u}) | \boldsymbol{u} \in U_N(x_0), x_a(t) \in x_a(0) \oplus Z\} \tag{۳۰}$$

در $\mathbb{P}_N^*$ شرط اولیه $x_a(\cdot)$ نامشخص و متغیر تصمیم‌گیری است. شرط اولیه $x_a(\cdot)$ نامشخص عبارت است از:

$$x_a(t) \in x_a(0) \oplus Z$$

در رابطه بالا، x متغیری است که باید کنترل شود. به سادگی می‌توان نشان داد که $\mathbb{P}_N^*$ یک مسئله برنامه‌ریزی مربعی است. پاسخ مسئله $\mathbb{P}_N^*$ توالی کنترلی بهینه $\mathbf{u}^*$ است.

$$\mathbf{u}^* \triangleq \{u_0^*(x_a(t)), u_1^*(x_a(t)), \dots, u_{N-1}^*(x_a(t))\}$$

و توالی بهینه حالت‌های $\mathbf{x}^*(x_a(t)) \triangleq \{x_0^*(x_a(t)), x_1^*(x_a(t)), \dots, x_{N-1}^*(x_a(t))\}$ است که برای هر $t > 0$ رابطه $x^*(x_a(t)) \triangleq \overline{\phi}(i; x_0^*(x_a(t)), \mathbf{u}^*(x))$ برقرار است. $x^*(x_a(t))$ پاسخ و حالت سیستم نامعین است و در صورت نامعینی صفر برابر $x_a(t)$ و در صورت وجود نامعینی مقداری متفاوت است. جفت $(x_0, \mathbf{u})$ یک پاسخ ممکن است در صورتی که $x \in x_a(0) \oplus Z$ و $\mathbf{u} \in U_N(x_a(\cdot))$ برقرار باشد. پاسخ صریح مسئله کنترل مدل پیش‌بین سیستم نامعین بر پایه لم ۱ به صورت زیر است.

$$\kappa_N^*(x_a(t)) \triangleq u_0^*(x_a(t)) + K(x_a(t) - x_0^*(x_a(t))) \quad (۳۱)$$

قانون کنترلی برای حالت $x_a(t)$ برابر $\kappa_N^*(x_a(t))$ است و لزوما برابر $u_0^*(x_a(t))$ نیست. فرض می‌شود که x برابر هر حالت دلخواه از مجموعه زیر باشد.

$$X_N \triangleq \{x | \exists x_a(0) \; such \; that \; x_a(t) \in x_a(0) \oplus Z, U_N(x_a(\cdot)) \neq \emptyset\}$$

رابطه فوق دامنه تابع هزینه $V_N^*(.)$ می‌باشد. . مسیر کنترل $\mathbf{u}^*(x_a(t))$ و مسیر حالت $\mathbf{x}^*(x_a(t))$ برای مسئله $\mathbb{P}_N^*(x_a(t))$ در روابط $u_i^*(x_a(t)) \in \mathbb{U} \ominus KZ$ و $x_i^*(xx_a(t)) \in \mathbb{X} \ominus Z$ برای تمامی $t \in \{0,1,\dots,N-1\}$ صدق می‌کند. همچنین رابطه $x_N^*(x_a(t)) \in X_f \subset \mathbb{X} \ominus Z$ برقرار است.

- **لم ۲ [۲۴]**: سه نتیجه زیر از تعریف مسئله کنترل بهینه $\mathbb{P}_N^*(x_a(t))$ حاصل شده است.

I: دامنه X_N از $V_N^*(.)$ در رابطه $X_N = \overline{X}_N \oplus Z \subseteq \mathbb{X}$ صدق می‌کند که در آن $\overline{X}_N$ دامنه $V_N^0(.)$ می‌باشد.

II: روابط $V_N^*(x_a(t)) = V_N^0\left(x_0^*(x_a(t))\right)$ و $\mathbf{u}^*(x_a(t)) = \mathbf{u}^0\left(x_0^*(x_a(t))\right)$ برای تمامی $x_a(t) \in X_N$ صادق است.

III: برای تمامی $x \in Z$، $V_N^*(x_a(t)) = 0$، $x_0^*(x_a(t)) = 0$، $\mathbf{u}^*(x_a(t)) = \{۰,۰,\dots,۰\}$، $\mathrm{x}^*(x_a(t)) = \{۰,۰,\dots,۰\}$ و $\kappa_N^*(x_a(t)) = Kx_a(t)$ می‌باشد.

لم بعدی نشان می‌دهد که پاسخ مسئله کنترل مدل پیش‌بین $\kappa_N^*(.)$ منجر به کمترین مقدار تابع هزینه با تابع لیاپانوف می‌شود (تابع هزینه مسئله کنترل مدل پیش‌بین کاندیدای تابع لیاپانوف نیز می‌باشد).

- **لم ۳**: فرض کنید که $x_a(t) \in X_N$ به گونه‌ای که $(x_0^*(x_a(t)), \mathbf{u}^*(x_a(t)))$ برای مسئله $P_N^*(x_a(t))$ یک پاسخ امکان‌پذیر است ($\mathbf{u}^*(x_a(t)) = \{u_0^*(x_a(t)), u_1^*(x_a(t)), \dots, u_{N-1}^*(x_a(t))\}$ و $\mathbf{x}^*(x_a(t)) = \{x_0^*(x_a(t)), x_1^*(x_a(t)), \dots, x_{N-1}^*(x_a(t))\}$). آنگاه برای همه $x_a(t+1) \in AX + B\kappa_N^*(x_a(t)) \oplus W$، $(x_1^*(x_a(t)), \tilde{\mathbf{u}}(x_a(t)))$ با $\tilde{\mathbf{u}}(x_a(t))$ به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\tilde{\mathbf{u}}(x_a(t)) \triangleq \{u_1^*(x_a(t)), u_2^*(x_a(t)), \dots, u_{N-1}^*(x_a(t)), Kx_N^*(x_a(t))\}$$

سیگنال کنترلی بالا برای مسئله $P_N^*(x)$ یک پاسخ امکان‌پذیر است و

$$V_N^*(x_a(t+1)) \leq V_N^*(x_a(t)) - l(x_0^*(x_a(t)), \kappa_N^0(x_0^*(x_a(t)))) \quad (۳۲)$$

- **اثبات:** فرض می‌شود که مسیر متناسب با $\mathbf{u}^*(x_a(t))$ و $\tilde{\mathbf{u}}(x_a(t))$ به ترتیب $\mathbf{x}^*(x_a(t))$ و $\tilde{\mathbf{x}}(x_a(t))$ می‌باشند.

$$\tilde{\mathbf{x}}(x_a(t)) = \{x_1^*(x_a(t)), x_2^*(x_a(t)), .., x_N^*(x_a(t)), A_K x_N^*(x_a(t))\}$$

با توجه به $x_a(t) \in x_0^*(x_a(t)) \oplus Z$ و با پروپوزیشن ۱ و رابطه (۲۳) می‌توان نتیجه گرفت که $x_a(t+1) \in x_1^*(x_a(t)) \oplus Z$. قیود ۹ -۱۱ با $(\mathrm{x}^*(x_a(t)), \mathrm{u}^*(x_a(t)))$ برقرار است تا زمانی که پاسخ امکان‌پذیر برای مسئله $\mathbb{P}_N^*(x)$ می‌باشد.

قید ۹ با N-1 المان اول $\tilde{\mathbf{u}}(x_a(t))$ و قید ۱۰ با N المان اول $\tilde{\mathbf{x}}(x_a(t))$ برقرار است. با توجه به اینکه $x_N^*(x_a(t)) \in X_f$، این نتیجه از رابطه A1 حاصل می‌شود که $K x_N^*(x_a(t)) \in \mathbb{U} \ominus KZ$ و $A_K x_N^*(x_a(t)) \in X_f$ برقرار است بنابراین المان آخر $\tilde{\mathbf{u}}(x_a(t))$ $(K x_N^*(x_a(t)))$ در قید ۹ و المان آخر $\tilde{\mathbf{x}}(x_a(t))$ $(A_K x_N^*(x_a(t)))$ در قید ۱۱ صدق می‌کند. بنابراین $\tilde{\mathbf{u}}(x_a(t)) \in U_N(x_1^*(x_a(t)))$ برقرار است. تا زمانی که $x_A(t+1) \in x_1^*(x_a(t)) \oplus Z$ و $\tilde{\mathbf{u}}(x_a(t)) \in U_N(x_1^*(x_a(t)))$ برقرار است و جفت $(x_1^*(x_a(t)), \tilde{\mathbf{u}}(x_a(t)))$برای مسئله $\mathbb{P}_N^*(x_a(t+1))$ امکان‌پذیر و $x_a(t+1) \in x_1^*(x_a(t)) \oplus Z$ است. برقراری رابطه $x_a(t+1) \in x_1^*(x_a(t)) \oplus Z$ منجر به امکان‌پذیری $(x_1^*(x_a(t)), \mathbf{u}^0(x_1^*(x_a(t))))$ برای مسئله $\mathbb{P}_N^*(x_a(t+1))$ و اثبات ۲۴ می‌شود. بنابراین رابطه $V_N^*(x_a(t+1)) \leq V_N^0(x_1^*(x_a(t)))$ برقرار است و از رابطه ۱۷ می‌توان نتیجه گرفت که $V_N^*(x_1^*(x_a(t))) \leq V_N^0(x_0^*(x_a(t))) - l(x_0^*(x_a(t)), \kappa_N^0(x_0^*(xx_a(t))))$ تا زمانی $x_1^*(x_a(t))$ وضعیت سیستم نامی در لحظه ای ۱ ام است اگر در لحظه صفرم وضعیت سیستم $x_0^*(x_a(t))$ و سیگنال کنترل $\kappa_N^0(x_0^*(x_a(t))) = u_0^0(x_0^*(x_a(t)))$ است و نتیجه $V_N^*(x_a(t)) = V_N^0(x_0^*(x_a(t)))$ را حاصل می‌شود.

- **تئوری ۱:** مجموعه Z پایدار مجانبی مقاوم برای سیستم $x_a(t+1) = Ax_a(t) + B\kappa_N^*(x_a(t)) + d$ با $d \in D$ است و ناحیه جذب آن X_N است.
- **اثبات:** از لم ۲ صحت عبارت $V_N^*(x_a(t)) = V_N^0(x_0^*(x_a(t)))$ برای تمام $x_a(t) \in X_N$ مشخص است. بنابراین از روابط ۱۸-۲۰ و ۲۴ می‌توان نتیجه گرفت که

$$V_N^*(x_a(t)) = V_N^*(x_0^*(x_a(t))) \geq c_1 |x_0^*(x_a(t))|^2, \forall x_a(t) \in X_N \quad (۳۳)$$

$$\begin{aligned} VV\_N^{\wedge} * (x\_a\,(t+1)) - V\_N^{\wedge} * (x\_a\,(t)) \\ \leq -l(x\_0^{\wedge} * (x\_a\,(t)), \kappa\_N^{\wedge}0\,(x\_0^{\wedge} * (x\_a\,(t)))) \\ \leq c\_1\,|x\_0^{\wedge} * (x\_a\,(t))|^{\wedge}2, \end{aligned} \quad (۳۴)$$

$$\forall x\_a\,(t) \in X\_N, \forall x\_a\,(t+1) \in (Ax\_a\,(t) + B\kappa\_N^{\wedge} * (x\_a\,(t))) \oplus W,$$

$$V_N^*(x_a(t)) = V_N^*(x_0^*(x_a(t))) \leq c_2 |x_0^*(x_a(t))|^2, \forall x_a(t) \in X_f \oplus Z \quad (۳۵)$$

در روابط فوق $c_2 > c_1$ برقرار است. فرض می‌شود که $x_a(t)$ پاسخ مسئله $x_a(t+1) = Ax_a(t) + B\kappa_N^*(x_a(t)) + d(t)$ با شرط اولیه $x(0) = x$ و اغتشاش $d(t)$ است. با استفاده از پروپوزیش ۳ عبارت $x_a(t) \in$

X_N برای تمامی i برقرار است. برای تمامی $\alpha \geq 0$ عبارت $S_\alpha \triangleq \{x|V_N^*(x_a(t)) \leq \alpha\}$ در نظر گرفته می‌شود. سپس $S_0 = Z$ و $\alpha > 0$ به گونه‌ای وجود دارد که $S_\alpha \subset X_f \oplus Z$. از روابط ۲۵-۲۷ عبارت‌های زیر برای تمامی $x(0) = x_a(t)$ و مقدار $c < \infty$ جمع‌بندی شده‌است.

$$V_N^*(x_a(t)) \leq \gamma^t V_N^*\big(x_a(0)\big), \gamma \triangleq (1 - c_1/c_2) \in (۰,۱)$$

$$\left|x_0^*\big(x_a(t)\big)\right| \leq c\delta^t \left|x_0^*\big(x_a(0)\big)\right|, \delta \triangleq \sqrt{\gamma}$$

تا زمانی که X_N و $\overline{X}_N$ کراندار هستند، از رابطه ۲۶ می‌توان این‌گونه نتیجه گرفت که یک مقدار نامتناهی صحیح I وجود دارد که برای تمامی $t \geq I$، تمامی $x_a(t) \in X_N$ و تمامی اغتشاشات $w(.)$ عبارت $x_a(t) \in S_\alpha$ برقرار است. بنابراین $d > c$ وجود دارد که برای تمامی $x_a(0) = x_a(t) \in X_N$ و اغتشاش $w(.)$ عبارت $\left|x_0^*\big(x_a(t)\big)\right| \leq d\delta^t |x_0^*\big(x_a(0)\big)|$ برقرار است. تا زمانی که $x_a(i) \in x_0^*\big(x_a(t)\big) \oplus Z$ برقرار است، آنگاه مجموعه Z پایدار مجانبی مقاوم برای سیستم نامعین با ناحیه جذب X_N است.

مثال عددی

در بخش نتیجه‌گیری در مرجع [۲۲] مدل کاهش مرتبه داده شده و خطی شده از رابطه (۶) ارائه شده است. این مدل به صورت زیر تعریف شده است.

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{q} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 14.7805 & 0 & 0.01958 \\ -100.858 & 1 & -0.1256 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ q \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3.4858 & 14.7805 \\ 20.42 & -94.8557 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_\eta \\ \alpha_w \end{bmatrix} + A_d d(t) \qquad (۳۶)$$

قیود حالت‌ها و کنترل سیستم عبارت است از:

$$\in \mathbb{X} \triangleq \{x| \begin{bmatrix} -4 \\ -0.1 \\ -2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 7 \\ 0.1 \\ 6 \end{bmatrix}\}$$

$$u \in \mathbb{U} \triangleq \{u|\ |u_{1,2}| \leq 0.1\}$$

همچنین اغتشاش کراندار است.

$$d \in D \triangleq \{d|\left\|d_{1,2}\right\|_\infty \leq 0.6\}$$

ماتریس‌های تابع هزینه عبارتند از

$$Q = I, R = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}, V_f(x) = 0.5x^T \begin{bmatrix} 2 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} x$$

قانون کنترل $u = Kx$ پاسخ مسئله غیرمقید است. مجموعه Z یک مجموعه چندوجهی مجموعه تغییرناپذیر برای اغتشاش است و کنترل کننده مدل پیش‌بین با استفاده از جعبه ابزار نرم افزار Matlab R۲۰۲۰a محاسبه شده است.

مجموعه Z به‌عنوان یک تقریب مجموعه محدودیت پایانی X_f را برآورده می‌کند. طول افق پیش‌بینی ۱۰ و افق کنترلی ۵ است. با استفاده از خروجی‌های اندازه‌گیری‌شده، ضرایب ماتریس‌های رویت‌گر با حل مسئله چند پارامتری مربعی مطابق رابطه زیر در نظر گرفته می‌شود.

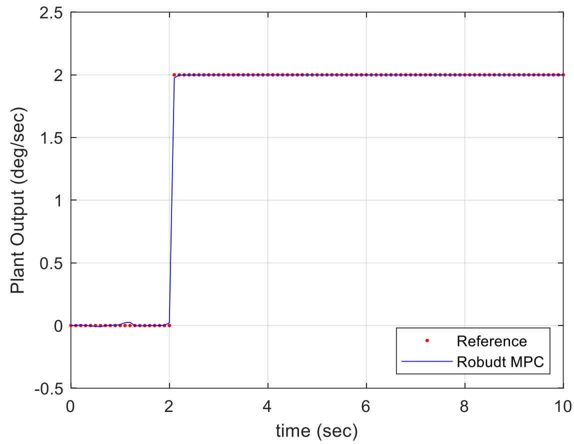
$$L_x = \begin{bmatrix} 24.2 & 2.6 \\ 17.3 & 23.6 \\ -6.0096 & 6.0793 \end{bmatrix}, L_d = [1581.3 \quad 199.5] \tag{۳۷}$$

همان‌گونه که در بخش‌های قبل بیان شد، روش توسعه داده شده در این مقاله بر پایه روش کنترل مدل پیش‌بین مقاوم است و بنابراین مقایسه‌ها با روش کنترل مدل پیش‌بین مقاوم انجام گرفته است. در شکل (۲) پاسخ الگوریتم کنترل مدل پیش‌بین مقاوم برای سیستم (۳۶) با در نظر گرفتن نامعینی ۵ درصد نشان داده شده است. در ابتدا یک سناریوی پیاده‌سازی روش کنترل مدل پیش‌بین مقاوم بدون به کارگیری رویت‌گر برای راکت رابطه (۶) شبیه‌سازی شده و نتایج آن در شکل (۲) نشان داده شده است. ماتریس‌های تابع هزینه در طراحی کنترل مدل پیش‌بین مطابق رابطه (۳۷) در نظر گرفته شده است. ماتریس‌های تابع هزینه می‌تواند بر اساس تجربه و یا الگوریتم‌های بهینه‌سازی مجزا در نظر گرفته شوند که موضوع مقاله حاضر نیست. سپس همین سناریو برای روش توسعه داده‌شده در این مقاله شبیه‌سازی شده است. پاسخ سیستم با اعمال اغتشاش شکل (۳) به سیستم (۳۶) و به کارگیری الگوریتم توسعه داده شده با کنترل مدل افزونه پیش بین مقاوم در شکل (۴) و (۵) مقایسه شده است. همان‌گونه که در شکل (۳) نشان داده شده، پاسخ گذرا در الگوریتم توسعه داده شده دارای فراجهش بیشتر است. در واقع الگوریتم توسعه داده شده قادر است که خطای ناشی از اغتشاش و نامعینی را کاهش دهد و البته پاسخ گذرای روش کنترل مدل پیش‌بینن مقاوم دارای عملکرد بهتری است. تصویر ۲ بعدی مسیر حالت‌ها در شکل (۶) رسم شده و تغییرناپذیری در برابر اغتشاش در آن نشان داده شده است.

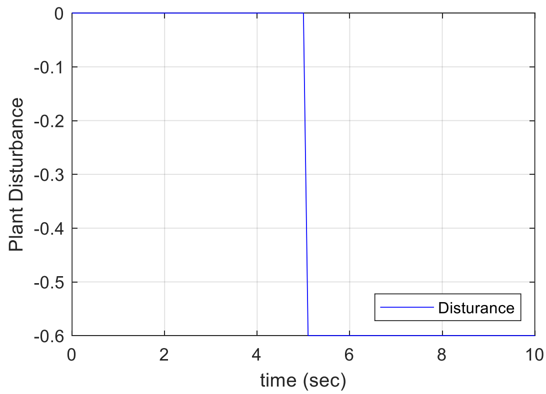
همان‌گونه که در این شکل‌ها مشخص است، عملکرد روش کنترل مدل پیش‌بین مقاوم تضمین تغییرناپذیری در برابر اغتشاش را دارد، اما برای حذف خطای ماندگار لازم است که سیستم به صورت افزونه در نظر گرفته شود و حالت اضافی با تخمین‌گر اغتشاش محاسبه شود. لازم به ذکر است که اغتشاش در سناریوی شبیه‌سازی شده همراه با تخمین آن در شکل (۷) نشان داده شده و همچنین حالت‌های فضای حالت و همچنین تخمین حالت‌ها در این شکل مشخص شده است. همان‌گونه که مشخص است، تخمین اغتشاش همراه با خطا است که ناشی از مدل‌سازی اغتشاش به عنوان یک متغیر حالت در سیستم افزونه است. با این وجود عملکرد کنترل‌کننده از نظر سرعت و خطا مطلوب است.

در شکل (۸) عملکرد روش کنترل مدل پیش بین و روش توسعه داده شده با وجود نویز نشان داده شده است. باید توجه داشت که عملکرد هر دو الگوریتم در برابر نویزی با واریانس ۰/۱ تقریبا مشابه بوده و تفاوتی ندارد. باید توجه داشت که یکی از چالش‌های به کارگیری مسئله کنترل مدل پیش‌بین مقاوم، حل این مسئه به صورت برخط است و روش‌های صریح[1] و خارج‌خط برای رفع مشکلات پیاده‌سازی توسعه داده شده‌اند. در روش پیشنهادی این مقاله، حل‌پذیری مسئله کنترل مقاوم به خاطر افزونه شدن مدل و به کارگیری رویت‌گر جدی‌تر شده است. از این رو در پژوهش‌های بعدی پیشنهاد می‌شود که الگوریتم‌هایی برای کاهش حجم محاسبات توسعه داده شود. لازم به ذکر است که هر چه مسئله پیچیده‌تر شود، امکان به کارگیری زمان نمونه‌برداری کوچک دشوارتر است. در شکل (۹) پاسخ مسئله برای زمان‌های نمونه‌برداری ۰/۱، ۰/۱۵ و ۰/۲ ثانیه بررسی شده و به نظر می‌رسد در عمکرد پاسخ اثری ندارد و حل‌پذیری آن در این زمان تنها مسئله جدی است.

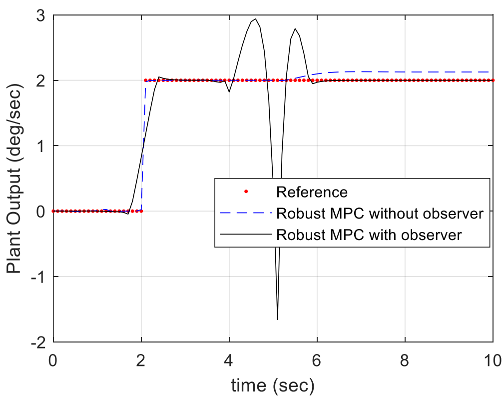
[1] Explicit



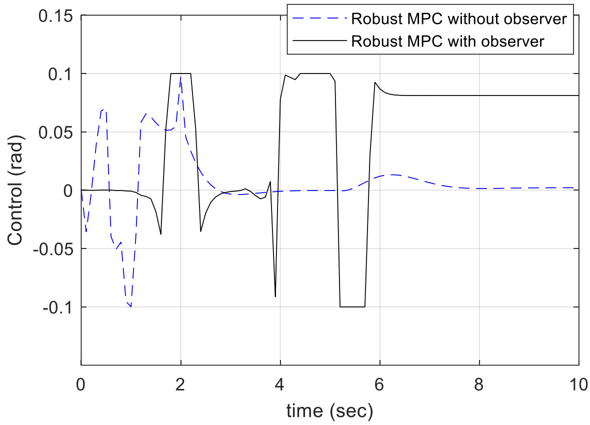
شکل ۲. پاسخ مدل پیش‌بین مقاوم برای سیستم (۳۶) بدون وجود رویت‌گر.



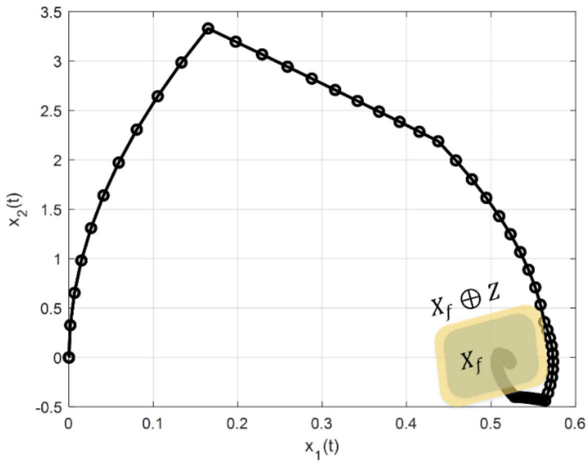
شکل ۳. اغتشاش.



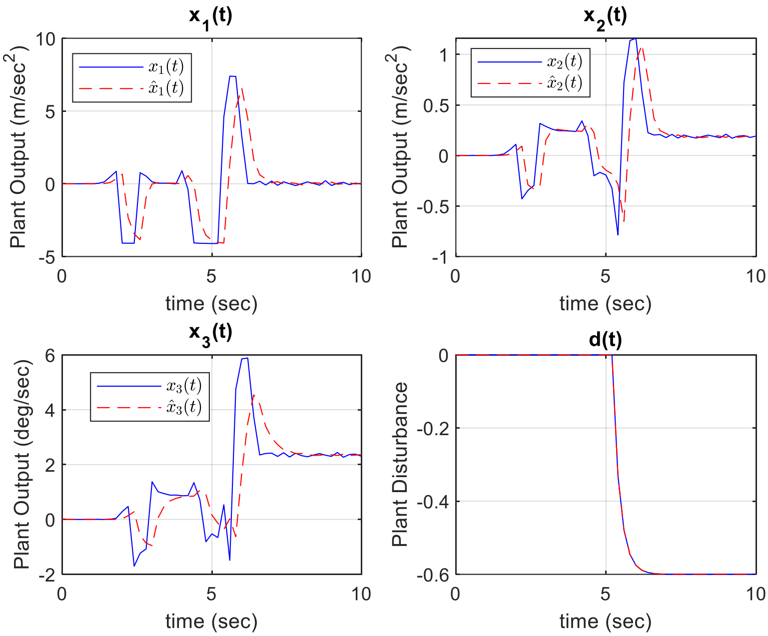
شکل ۴. مقایسه پاسخ کنترل‌کننده پیشنهادی با مدل پیش‌بین مقاوم.



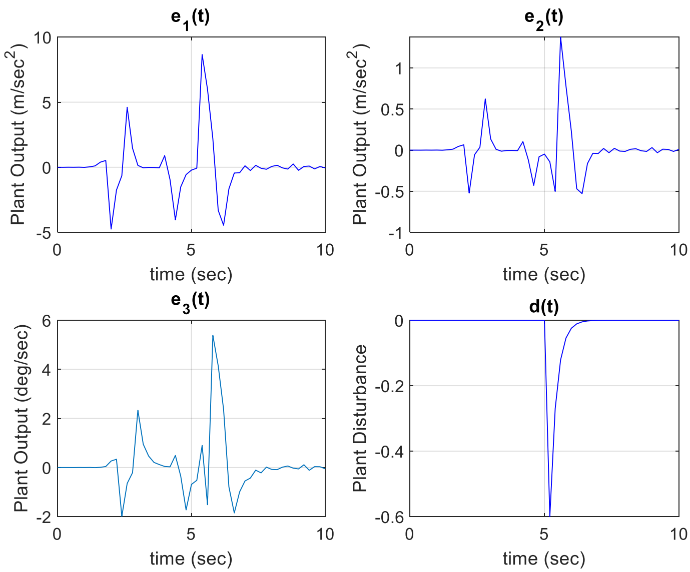
شکل ۵. سیگنال کنترلی الگوریتم پیشنهادی (با رویت‌گر) و کنترل مدل پیش‌بین مقاوم.



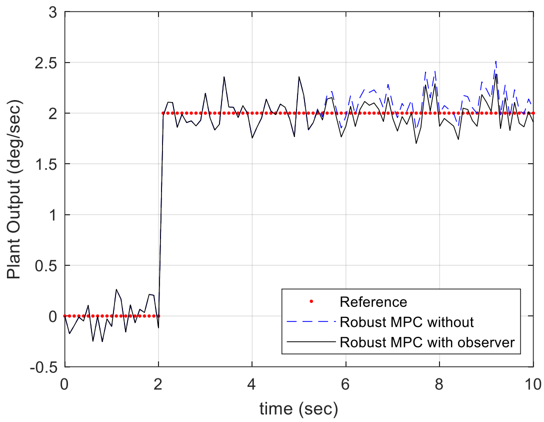
شکل ۶. تصویر ۲ بعدی مسیر در روش پیشنهادی برای حالت‌های $x_1(t)$ و $x_2(t)$.



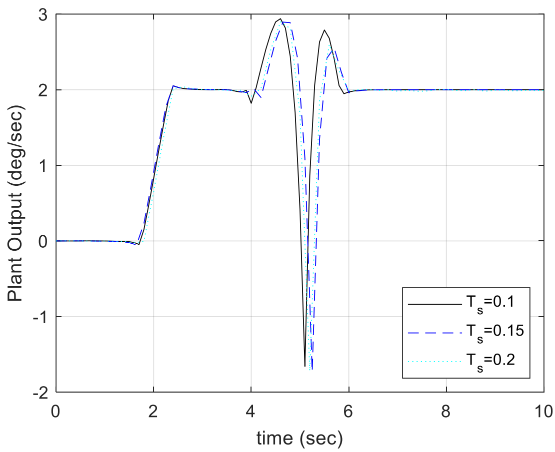
شکل ۷. تخمین حالت‌ها و اغتشاش در الگوریتم مدل پیش‌بین افزونه مقاوم برای سیستم (۳۶) با وجود رویت‌گر.



شکل ۸. خطای تخمین حالت‌ها و اغتشاش در الگوریتم مدل پیش‌بین افزونه مقاوم برای سیستم (۳۶) با وجود رویت‌گر.



شکل ۹. مقایسه پاسخ کنترل‌کننده پیشنهادی با مدل پیش‌بین مقاوم در برابر نویز.



شکل ۱۰. ارزیابی ثابت زمانی بر پاسخ سیستم در کنترل‌کننده پیشنهادی.

نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش مقاوم کنترل مدل پیش‌بین با رویت‌گر حالت و اغتشاش برای کاربردهای تکنولوژی بالا توسعه داده شد. به همین منظور مدل سیستم حول نقطه کار خطی شده و سپس یک مدل خطی افزونه از حالت‌های سیستم و اغتشاش همراه با دینامیک رویت‌گر در نظر گرفته می‌شود. در ادامه روابط کنترل مدل پیش‌بین مقاوم برای این سیستم توسعه داده شد و الگوریتم توسعه داده شده برای یک مدل راکت به کار گرفته شد. نتایج شبیه‌سازی نشان داد که به کارگیری روش کنترل مدل افرونه پیش‌بین مقاوم همراه رویت‌گر برای سیستم‌های پیچیده نظیر کاربردهای هوافضا نسبت به روش کنترل پیش‌بین مقاوم می‌تواند در حذف خطای ماندگار عملکرد مطلوبی داشته باشد. روش پیشنهادی در حذف خطای ماندگار نسبت به روش کنترل مدل پیش‌بین مقاوم بهتر ولی نوسانات بیشینه را نتوانسته کاهش دهد و محدودیت فراجهش بیشینه در به‌کارگیری کنترل‌کننده پیشنهادی باید در نظر گرفته شود. در واقع روش پیشنهادی در یک موازنه، توانسته خطای حالت ماندگار را حذف کند و هزینه‌هایی نیز داشته است. همچنین در حالت گذرا، اثر نویز و تغییرات ثابت زمانی بر روی عملکرد الگوریتم پیشنهادی بررسی و تحلیل است.

References

[1] Kothare, M. V., Balakrishnan, V., & Morari, M. (1996). Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, *32*(10), 1361-1379. https://doi.org/10.1016/0005-1098(96)00063-5

[2] Wan, Z., & Kothare, M. V. (2003). An efficient off-line formulation of robust model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, *39*(5), 837-846. https://doi.org/10.1016/S0005-1098(02)00174-7

[3] Wan, Z., & Kothare, M. V. (2003). Efficient robust constrained model predictive control with a time varying terminal constraint set. *Systems & Control Letters*, *48*(5), 375-383. https://doi.org/10.1016/S0167-6911(02)00291-8

[4] Borrelli, F., Falcone, P., Keviczky, T., Asgari, J., & Hrovat, D. (2005). MPC-based approach to active steering for autonomous vehicle systems. *International Journal of Vehicle Autonomous Systems*, *3*(2-4), 265-291. https://doi.org/10.1504/ijvas.2005.008237

[5] Schildbach, G., Fagiano, L., Frei, C., & Morari, M. (2014). The scenario approach for Stochastic Model Predictive Control with bounds on closed-loop constraint violations. *Automatica*, *50*(12), 3009-3018. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2014.10.035

[6] Yan, Z., & Wang, J. (2014). Robust Model Predictive Control of Nonlinear Systems With Unmodeled Dynamics and Bounded Uncertainties Based on Neural Networks. *Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, *25*(3), 457-469. https://doi.org/10.1109/TNNLS.2013.2275948

[7] Ghaffari, V., Naghavi, S. V., & Safavi, A. A. (2013). Robust model predictive control of a class of uncertain nonlinear systems with application to typical CSTR problems. *Journal of Process Control*, *23*(4), 493-499. https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2013.01.009

[8] Pascucci, C. A., Bennani, S., & Bemporad, A. (2015, July 15-17). *Model predictive control for powered descent guidance and control.* 2015 European Control Conference, Linz, Austria. https://doi.org/10.1109/ECC.2015.7330732

[9] Eren, U., Prach, A., Koçer, B. B., Raković, S. V., Kayacan, E., & Açıkmeşe, B. (2017). Model Predictive Control in Aerospace Systems: Current State and Opportunities. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, *40*(7), 1541-1566. https://doi.org/10.2514/1.G002507

[10] Cairano, S. D., & Kolmanovsky, I. V. (2018, June 27-29). *Real-time optimization and model predictive control for aerospace and automotive applications.* 2018 Annual American Control Conference, Milwaukee, Wisconsin, United States. https://doi.org/10.23919/ACC.2018.8431585

[11] Mao, Y., Dueri, D., Szmuk, M., & Açıkmeşe, B. (2019). Convexification and Real-Time Optimization for MPC with Aerospace Applications. In S. V. Raković & W. S. Levine (Eds.), *Handbook of Model Predictive Control*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77489-3_15

[12] Moshtaghi Yazdani, N., & Olyaei Torqabeh, M. H. (2021). Optimization of Model Predictive Control Horizons Using Particle Swarm Algorithm to Synchronize Marine Simulator Motion. *Karafan Quarterly Scientific Journal*, *18*(3), 169-186. https://doi.org/10.48301/kssa.2021.271748.1381

[13] Zanon, M., & Gros, S. (2021). Safe Reinforcement Learning Using Robust MPC. *Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Automatic Control*, *66*(8), 3638-3652. https://doi.org/10.1109/TAC.2020.3024161

[14] Liu, X., Qiu, L., Rodríguez, J., Wu, W., Ma, J., Peng, Z., Wang, D., & Fang, Y. (2022). Data-Driven Neural Predictors-Based Robust MPC for Power Converters. *Institute*

of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Power Electronics, *37*(10), 11650-11661. https://doi.org/10.1109/TPEL.2022.3171100

[15] Zhang, X., Pan, W., Scattolini, R., Yu, S., & Xu, X. (2022). Robust tube-based model predictive control with Koopman operators. *Automatica*, *137*(1), 110114. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2021.110114

[16] Bhattacharjee, D., Chakravarthy, A., & Subbarao, K. (2021). Nonlinear Model Predictive Control and Collision-Cone-Based Missile Guidance Algorithm. *Journal of Guidance*, *Control*, *and Dynamics*, *44*(8), 1481-1497. https://doi.org/10.2514/1.G005879

[17] Lee, S., Lee, H., Kim, Y., Kim, J., & Choi, W. (2022). GPU-Accelerated PD-IPM for Real-Time Model Predictive Control in Integrated Missile Guidance and Control Systems. *Sensors*, *22*(12), 4512. https://doi.org/10.3390/s22124512

[18] Zeilinger, M. N., Raimondo, D. M., Domahidi, A., Morari, M., & Jones, C. N. (2014). On real-time robust model predictive control. *Automatica*, *50*(3), 683-694. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2013.11.019

[19] Wang, J., Cui, N., & Wei, C. (2019). Optimal Rocket Landing Guidance Using Convex Optimization and Model Predictive Control. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, *42*(5), 1078-1092. https://doi.org/10.2514/1.G003518

[20] Wu, C., Yang, J., Li, S., Li, Q., & Guo, L. (2018). Disturbance observer based model predictive control for accurate atmospheric entry of spacecraft. *Advances in Space Research*, *61*(9), 2457-2471. https://doi.org/10.1016/j.asr.2018.02.010

[21] Oliveira, É. L., Orsino, R. M. M., & Donha, D. C. (2021). Disturbance-Observer-Based Model Predictive Control of Underwater Vehicle Manipulator Systems. *International Federation of Automatic Control-PapersOnLine*, *54*(16), 348-355. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2021.10.115

[22] Kisabo, A. B., Adebimpe, A. F., Okwo, O. C., & Samuel, S. O. (2019). State-Space Modeling of a Rocket for Optimal Control System Design. In C. Osheku (Ed.), *Ballistics*. IntechOpen. https://doi.org/10.5772/intechopen.82292

[23] Mohammadkhani, M., Bayat, F., & Jalali, A. A. (2015). Two-stage observer based offset-free MPC. *International Society of Automation Transactions*, *57*, 136-143. https://doi.org/10.1016/j.isatra.2015.02.015

[24] Mayne, D. Q., Seron, M. M., & Raković, S. V. (2005). Robust model predictive control of constrained linear systems with bounded disturbances. *Automatica*, *41*(2), 219-224. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2004.08.019

[25] Mayne, D. Q., Rawlings, J. B., Rao, C. V., & Scokaert, P. O. M. (2000). Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, *36*(6), 789-814. https://doi.org/10.1016/S0005-1098(99)00214-9