



Constitutive Modeling of Transversely Isotropic Materials to Investigate the Mechanical Behavior of Thick-Walled Cylindrical Tubes

Mehdi Abrishamdari¹, Hosein Darijani^{2*} , Fatemeh Darijani³

¹MSc. Student, Mechanical Engineering Department, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran.

²Associate Professor, Mechanical Engineering Department, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran.

³Msc., Department of Mechanical Engineering, Technical and Vocational University (TVU), Tehran, Iran.

ARTICLE INFO

Received: 11.20.2022

Revised: 03.19.2023

Accepted: 05.06.2023

Keyword:

Strain energy density

Large deformations

Mechanical behavior

Thick-walled tubes

Hyperelastic materials

Stress analysis

Transversely isotropic

*Corresponding Author:

Hosein Darijani

Email: darijani@uk.ac.ir

ABSTRACT

Different categories of materials such as elastomers, polymers, foams and biological tissues exist that can show large elastic deformations under small stresses (compared to solid materials such as metals). By assigning a strain energy density function for this class of materials, their nonlinear behavior can be studied. In the current study a strain energy density function for transversely hyperelastic material was proposed and its coefficients were approximated (using least square error) by incorporating experimental results into the model. Expected deviations between the proposed model and the experimental results for the fibrous layer of articular capsule, ligaments, and the human knee tendons were bounded by 1e-5 MPa and 1e-7 Mpa, respectively. The proposed strain energy density function was a function of two invariants with greater accuracy than the proposed one by Qiu and Pence, Merodio and Ogden and Guo et al. which uses a strain energy density function with only one invariant. Using the strain energy density function, a closed analytical form independent of integrals terms for expressing the stress within a thick-walled cylindrical tube for transversely isotropic hyperelastic materials, that has similar mechanical behavior to that of a human artery, was derived. Stress analysis and investigation of deformations were carried out taking into consideration artery like structures with both ends open and closed while under axial loads.



EXTENDED ABSTRACT

Introduction

Different categories of materials such as elastomers, polymers, foams and biological tissues exist which can show large elastic deformations under small stresses (compared to solid materials such as metals). By assigning a strain energy density function for this class of materials, their nonlinear behavior can be described. In the present study, a strain energy density function for transversely hyperelastic materials was introduced. Using the strain energy density function, a fully analytical solution devoid of integral terms for stress distribution within the walls composed of transversely hyperelastic materials was derived.

Methodology

By assigning a strain energy density function for this family of materials, their non-linear properties were investigated. In the present study, the parameters of the corresponding strain energy density function were introduced and calibrated. The constraints governing the strain energy function were as follows: strain energy density function should not be negative for all deformations; the value of the strain energy density function should be zero when there is no deformation; the value of the strain energy density function should have its minimum value at the time of no deformation when there is no loading; the value of the strain energy density function should be per $\lambda_1=0$ or $\lambda_2=0$ or $\lambda_3=0$ and also $\lambda_1=\infty$ or $\lambda_2=\infty$ or $\lambda_3=\infty$, must be positive and definite, and for the first case, the external loading must be infinite negative (compression) and the second case must be positive (tension); and the energy density function should represent non-isotropic effects, or in other words, they should be a function of J_4 and J_5 .

$$W = e_1(i_1^2 - 2i_2 - 3) + e_2(i_2^2 - 2i_1 - 3) + C_1(2J_4(i_2^2 - 3i_1) - J_5(i_1^2 - 3i_2)) + C_2(2J_4(i_2^2 - 3i_1) - J_5(i_1^2 - 3i_2))^2 \quad (1)$$

i_1 and i_2 are the first and the second invariants of the right Cauchy-Green tensor U . J_4 and J_5 are the invariants of the strain energy density function for the transversely hyperelastic materials and e_1, e_2, c_1, c_2 are material parameters which vary from material to material.

Table 1. Material parameters for fibrous ring layers.

Parameter (Mpa)	RSS	e1	e2	c1	c2
VLe	$3.75 \cdot 10^{-5}$	-213440.0311	266240.2653	-17585.1104	-67694.3077
VLi	$6.7 \cdot 10^{-8}$	-404.1585	544.0088	-46.4650	-286.7046
Di	$4.76 \cdot 10^{-6}$	-85.7116	97.1430	-3.4735	0

Analysis of the Transversely Cylindrical Tube: Assume a cylinder with the inner radius A , outer radius B , structural fiber angle of α under the internal pressure P_i , external

Pressure P_0 , axial force N , and the torsional torque of M . Axial force and the torsional torque are given by equations 2 and 3, respectively.

$$N = \int_{Q_i}^{Q_o} \frac{2\pi c Q \lambda_z}{(\lambda_z - Q^2)^2} \sigma_z(Q) dQ, \quad Q = \frac{R}{r} \quad (2)$$

$$M = \int_{Q_i}^{Q_o} \frac{2\pi c Q \lambda_z}{(\lambda_z - Q^2)^2} \sigma_z(Q) dQ - \pi a^2 \Delta P(Q), \quad \Delta P = P_i - P_o \quad (3)$$

where $c = a^2 - \lambda_z^{-1} A^2$ and λ_z is the axial elongation. The cylindrical coordinate is comprised of:

$$\mathbf{m} = (M_R, M_\theta, M_z) \quad (4)$$

$$M = \int_a^b 2\pi r^2 \sigma_{\theta z}(r) dr \quad (5)$$

Results and discussion

Stress and strain analysis were conducted on cylindrical tubes subjected to axial forces. Effects of various parameters, namely wall thickness, elongation due to prestressing, and mechanical properties of the material, on their deformation for $\lambda_z=1.1$ and $\eta=0.5$ are depicted in Figure 2. Consider an open cylindrical tube and a closed cylindrical tube under axial force N and internal pressure P so that the longitudinal strain is constant during loading. It is clear that the stress distribution and the pressure diagram according to the circumferential elongation are the same for both open and closed states, and only the axial force required to keep the length of the tank constant while applying pressure to the two open and closed states can be different.

Figure 1a shows the distribution of peripheral stress in terms of R for spiral fibers with different angles and Figure 1b shows the diagram of pressure in terms of circumferential elongation for a tank with spiral fibers for different angles of the fibers 0, 30, 45, 60 and 90 degree. According to Figure 1b, it can be observed that the amount of pressure required to reach the same elongation in tanks with circular fibers is much higher than with longitudinal fibers.

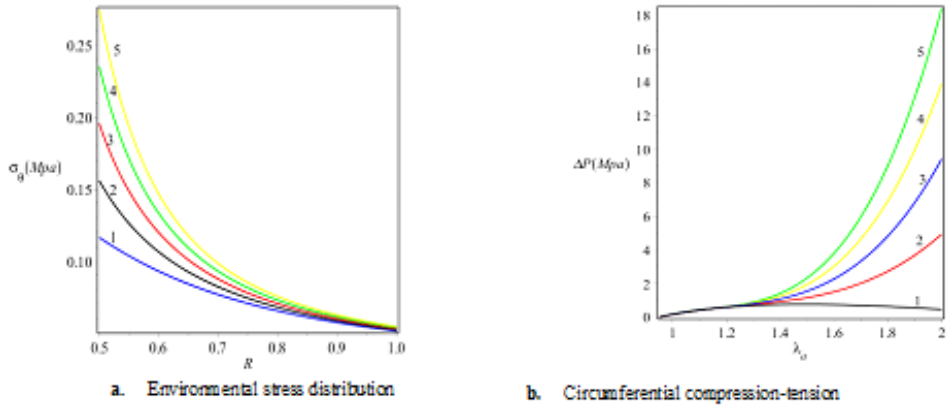


Figure 1. a) Environmental stress distribution; b) Circumferential compression-tension for spiral fibers with different angles of 1, 2, 3, 4, 5, respectively $\alpha = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$

Furthermore, the axial force required to keep the length of the tank constant for two states of open and closed tubes for spiral fibers with different angles is presented in Figure 2. According to the diagrams in Figure 2, which is the diagram of the axial force to maintain the $\lambda_z=1.1$ constant, the amount of force is positive (tensile) with the increase of the internal pressure and with the further increase of the internal pressure, the length of the cylinder exceeds the $\lambda_z=1.1$, and a negative axial force is (compressive) required to keep constant.

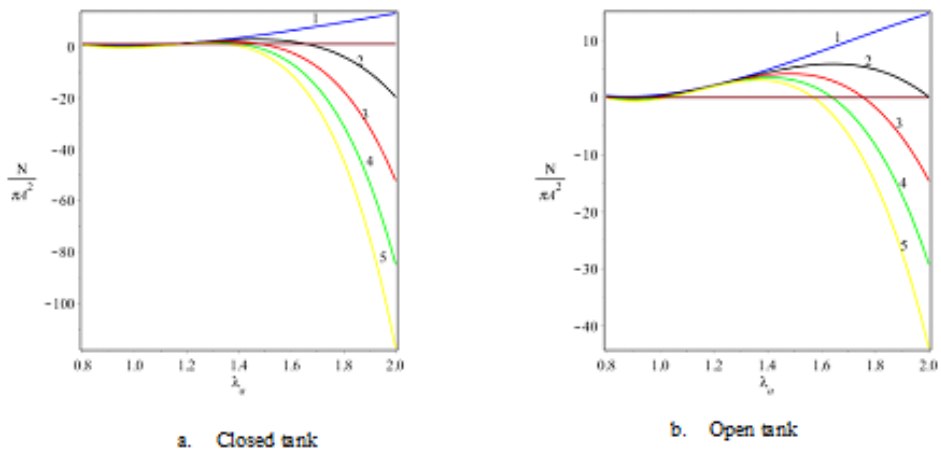


Figure 2. Axial force, with spiral fibers of different angles 1,2,3,4,5 respectively $\alpha = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ a) closed tank and b) open tank

Conclusion

First, a general form for the strain energy density function of laterally incompressible isotropic materials was presented based on the collective decomposition of the strain energy function, which included the energy stored in the base material and the energy stored in the fiber. The good agreement between the results of the proposed energy function and the experimental tests performed on different materials showed the high capability of the proposed energy density function in modeling the deformations. Finally, the focus was on thick-walled cylindrical tubes made of laterally isotropic materials. To solve this problem, the presented strain energy density function was used, and finally, the analytical solution was obtained without the existence of an ambiguous integral term.



دانشگاه فنی و حرفه‌ای
تکنولوژی و حرفه‌ای

کارافان

فصلنامه علمی دانشگاه فنی و حرفه‌ای

بهار ۱۴۰۲، دوره ۲۰، شماره ۱، ۲۴۸-۲۲۵

آدرس نشریه: <https://karafan.tvu.ac.ir/>

doi:10.48301/KSSA.2023.367691.2326



شاپای الکترونیکی: ۲۵۳۸-۴۴۳۰

شاپای چاپی: ۲۳۸۲-۹۷۹۶

مقاله پژوهشی

مدلسازی ساختاری مواد همسانگرد جانبی با رویکرد کاربرد مدل در بررسی رفتار مکانیکی تیوب‌های استوانه‌ای جدار ضخیم

مهدی ابریشم داری^۱، حسین دریجانی^{۲*}، فاطمه دریجانی^۳

- ۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران.
- ۲- دانشیار، بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران.
- ۳- کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و حرفه‌ای، تهران، ایران.

چکیده

دسته‌های مختلفی از مواد مثل الاستومرها، پلیمرها، فوم‌ها و بافت‌های بیولوژیکی وجود دارند که می‌توانند تغییر شکل‌های بزرگ الاستیک تحت تنش‌های کوچک (در مقایسه با مواد جامدی مثل فلزات) از خود نشان دهند. با نسبت دادن یک تابع چگالی انرژی کرنشی برای این دسته از مواد به توصیف رفتار غیرخطی آنها پرداخته می‌شود. در مطالعه حاضر، یک تابع چگالی انرژی کرنشی برای مواد هایپرالاستیک همسانگرد جانبی ارائه شده و مدل پیشنهادی با داده‌های تجربی با استفاده از روش مجموع مربعات باقیمانده کالیبره شده است. انحرافات پیش‌بینی شده (RSS) مدل پیشنهادی از داده‌های تجربی برای لایه‌های حلقه فیبروسی، رباط‌ها و تاندون زانوی انسان به ترتیب حداکثر از اردر 10^{-5} و 10^{-7} مگاپاسکال می‌باشد. تابع پیشنهادی تابعی از دو ناوردهای همسانگرد جانبی است که می‌تواند دقیق‌تر از توابع ارائه شده توسط کیو و پنس، میرویدو و آگدن و گوا و همکارانش که تابعی از یک ناوردهای همسانگرد جانبیست، باشد. با استفاده از تابع چگالی پیشنهادی، یک حل تحلیلی بسته بدون وجود ترم‌های انتگرالی مبهم برای توزیع تنش در دیواره تیوب تحت فشار داخلی جدار ضخیم ساخته شده از مواد هایپرالاستیک همسانگرد جانبی که رفتاری شبیه به رگ انسان دارد، ارائه شده است. تحلیل تنش و بررسی تغییر شکل برای این نوع سازه، شبیه به رگ، با دو انتهای باز و بسته با حضور نیروهای محوری صورت گرفته است.

اطلاعات مقاله

دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۰۸/۲۹

بازنگری مقاله: ۱۴۰۱/۱۲/۲۸

پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۰۲/۱۶

کلید واژگان:

چگالی انرژی کرنشی
تغییر شکل‌های بزرگ
رفتار مکانیکی
تیوب جدار ضخیم
هایپرالاستیک
تحلیل تنش
همسانگرد جانبی

*نویسنده مسئول: حسین دریجانی

پست الکترونیکی:

darijani@uk.ac.ir



©2023 Technical and Vocational University, Tehran, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

مقدمه

دسته‌های مختلفی از مواد مثل، الاستومرها، پلیمرها، فوم‌ها و بافت‌های نرم بیولوژیکی بدن مانند پوست، دیواره رگ‌ها و بافت‌های قلب و... وجود دارند که تغییر شکل‌های بزرگ الاستیک از خود نشان می‌دهند. مهم‌ترین و واضح‌ترین خاصیت فیزیکی مواد شبه لاستیک، میزان کشش‌پذیری زیاد آنها تحت تنش‌های کوچک (در مقایسه با مواد جامدی مثل فلزات) می‌باشد. ماکزیمم مقدار کشیدگی معمولاً در محدوده ۱۰-۵ می‌باشد و منحنی تنش-کشش، غیرخطی است، لذا ماده از قانون هوک تبعیت نمی‌کند [۱]. این مواد با وجود تغییر شکل‌های بزرگ، تغییر حجم قابل توجهی ندارند و می‌توان آنها را جزء مواد تقریباً تراکم‌ناپذیر در نظر گرفت. در واقع انرژی لازم برای تغییر حجم این مواد خیلی بیشتر از انرژی لازم برای تغییر شکل آنهاست. برای کشش‌های کوچک می‌توان شیب منحنی را به عنوان مدول الاستیسیته تعریف کرد که در حدود ۱ مگاپاسکال است. کشش‌پذیری زیاد و مدول الاستیسیته پایین لاستیک‌ها در مقایسه با جامداتی مثل فلزات که مدول الاستیسیته آنها حدود ۲۰۰ گیگاپاسکال و ماکزیمم کشش‌پذیری آنها حدود ۱/۰۱ است باعث می‌شود تا اختلاف چشمگیری بین شبه لاستیک‌ها و جامدات سختی مثل فلزات وجود داشته باشد [۲].

در اکثر مواقع، با توجه به مشکلات و پیچیدگی‌های موجود در بررسی رفتار مواد بدون تابع انرژی کرنشی، بهتر است رفتار الاستیک موادی بررسی شود که دارای تابع انرژی کرنشی می‌باشند [۳]. با استفاده از تابع انرژی کرنشی می‌توان رفتار این مواد را که اصطلاحاً فرا کشسان^۱ نامیده می‌شوند، به صورت تابعی از یک کرنش و مشتقات تابع اسکالر انرژی برحسب آن کرنش بیان نمود که باعث ساده شدن روابط می‌شود.

کیو و پنس^۲ در سال ۱۹۷۷ تابع چگالی انرژی برای مواد غیر همسانگرد در تغییر شکل‌های بزرگ ارائه کردند. آنها ابتدا مدل پیشنهادی خود را برای حالت کلی مواد ناهمسانگرد، که مرکب از یک ماده زمینه همسانگرد نئوهوکین و الیاف‌هایی جهت تقویت ماده زمینه هستند، ارائه کردند و سپس با تمرکز بر روی مواد همسانگرد جانبی، مدل تقویت استاندارد را ارائه نمودند [۴].

میرودیو و آگدن^۳ در سال ۲۰۰۵، مدل استاندارد پیشنهاد شده توسط کیو و پنس را برای مواد همسانگرد جانبی اصلاح نمودند. مدل آنها برخلاف مدل‌های قبلی که بخش ناهمسانگردی انرژی را فقط تابعی از کشش در جهت الیاف در نظر می‌گرفتند، برخی اثرات مربوط به تغییر شکل‌های برشی را نیز لحاظ کردند [۵].

ارغوانی و نقدآبادی در سال ۱۳۸۴، با اصلاح محدودیت‌های مدل کیو و پنس و همچنین مدل میرودیو و آگدن، تابع انرژی برای مواد همسانگرد جانبی پیشنهاد نمودند [۶]. آنها اثرات مربوط به کشیدگی در جهت الیاف و اثرات متقابل الیاف و ماده زمینه را به طور هم‌زمان در نظر گرفتند.

گوا^۴ و همکاران در سال ۲۰۰۷ با استفاده از تجزیه ضریبی تانسور گرادبان تغییر شکل تراکم‌ناپذیر، یک تابع چگالی انرژی کرنشی برای مواد همسانگرد جانبی ارائه نمودند [۷]. آنها علاوه بر ماده زمینه، رفتار الیاف را نیز نئوهوکین در نظر گرفتند.

هورگان و ساکوماندی^۵ در سال ۲۰۰۵ با در نظر گرفتن اثر سفت‌شوندگی با کشش برای الیاف که یکی از خواص بارز کولائنهاست، بخش ناهمسانگرد مدل تقویتی استاندارد را اصلاح نمودند و یک جمله نمایی جایگزین آن نمودند [۸]. هولزافل^۶ و همکارانش در سال ۲۰۰۰، به ارائه تابع انرژی برای بافت‌های نرم بدن پرداختند. آنها بخش همسانگردی

1 Hyperelastic

2 Qiu and Pence

3 Merodio and Ogden

4 Guo

5 Horgan and Saccomandi

6 Holzapfel

تابع انرژی را به فرم نئوهوکین و بخش ناهمسانگردی را به فرم نمایی در نظر گرفتند. دلیل استفاده از فرم نمایی رفتار سفت شوندگی این بافت‌ها با افزایش تغییر شکل بیان شده است [۹]. علاوه بر مدل‌های فوق می‌توان به ایتسکوف و اکسل^۱ [۱۰]، مارکرت^۲ [۱۱] و همکاران و سیارلتا^۳ [۱۲] و همکاران نیز اشاره کرد.

شور در سال ۲۰۱۵، تابع چگالی انرژی برای تاندون‌ها و رباط ارائه داد که تابعی از نسبت حجمی الیاف و زاویه الیاف لایه خارجی می‌باشد [۱۳]. همچنین تقی زاده و دریجانی یک تابع انرژی کرنشی برای رفتار مکانیکی بافت‌های نرم ارائه کردند که با دقت عالی داده‌های آزمایشگاهی را دنبال می‌کند [۱۴].

از آن جایی که یکی از اهداف، مدلسازی رفتار مکانیکی رگ انسان تحت اثر فشار داخلی است. به این منظور بایستی رفتار مکانیکی یک تیوب استوانه‌ای ساخته شده از مواد همسانگرد جانبی را مورد بررسی قرار داد. تعدادی از تحقیقات انجام شده در این زمینه و زمینه‌های مشابه به شرح زیر است. تعادل و پایداری مخازن جدار نازک استوانه‌ای تحت فشار داخلی یکنواخت از لحاظ تئوری توسط محققان بسیاری از جمله آدکین و ریولین^۴ [۱۵]، الکساندر^۵ [۱۶]، نیدل من^۶ [۱۷]، هاقتین و آگدن^۷ [۱۸] و هسگان و استیگمن^۸ [۱۹] بررسی شده است. همچنین این مسئله از لحاظ تجربی توسط مریت و وین هاس^۹ [۲۰]، پاملونا و همکاران^{۱۰} [۲۱] و ونگرکو و ترلور^{۱۱} [۲۲] مورد آزمایش قرار گرفته است. تئوری‌های مربوط به بافت‌های نرم^{۱۲} جدیدتر بوده و مدلسازی رفتار بافت‌های نرم و مسائل مربوط به آنها توسط محققان بسیاری از جمله میلر و چینزی^{۱۳} [۲۴] و ژائو و لیستر و دسای^{۱۴} [۲۵] مورد بررسی قرار گرفته است. اخیراً بافت‌های نرم، در حالت کلی ناهمسانگرد، توجه بیشتر محققان را جلب کرده است که آنها را به دو صورت کلی همسانگرد جانبی و ارتوتروپیک در نظر گرفته‌اند. سیلندر تقویت شده با یک دسته الیاف توسط محققانی از جمله آگدن و همکاران [۲۶]، هلزافل^{۱۵} [۹] مورد بررسی قرار گرفته است و کامل ترین حل توسط همدویی^{۱۶} و همکاران [۲۷] در سال ۲۰۱۴ ارائه گشت.

روش شناسی

هدف از مطالعه این مقاله، ارائه یک تابع چگالی انرژی کرنشی برای رسیدن به یک حل تحلیلی بسته برای تیوب سیلندری شکل، ساخته شده از مواد همسانگرد جانبی می‌باشد. مقادیر پارامترهای مادی با توجه به تطابق بین مقادیر چگالی انرژی کرنشی حاصل از نتایج آزمایش و مدل پیشنهادی، تعیین می‌گردد. به عنوان کاربرد عملی، این تابع چگالی انرژی کرنشی به منظور بررسی وجود یک حل تحلیلی بسته، بدون حضور ترم انتگرالی مبهم، برای توزیع تنش در دیواره تیوب‌های جدار ضخیم شبیه به رگ انسان، با شرایط مرزی و جنس متفاوت مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد.

¹ Itsokov and Aksel

² Markert

³ Ciarletta

⁴ Adkins and Rivlin

⁵ Alexander

⁶ Needleman

⁷ Haughton and Ogden

⁸ Haseganu and Steigmann

⁹ Merritt and Weinhaus

¹⁰ Pamplona

¹¹ Vangerko and Treloar

¹² Soft tissue

¹³ Miller and Chinzei

¹⁴ Gao and Lister and Desai

¹⁵ Holzapfel

¹⁶ El Hamdaoui

مفاهیم اولیه

یک جسم پیوسته را که یک زیرمجموعهٔ باز و پیوسته از فضای سه بعدی اقلیدسی نقاط (یا پیکربندی^۱) را اشغال می‌کند، در نظر بگیرید. یک پیکربندی دلخواه را به عنوان پیکربندی مرجع^۲ انتخاب کرده و آن را با \mathbf{B}_r و مرز آن را با $\partial\mathbf{B}_r$ نمایش داده. همچنین فرض بر آن است که هر نقطه از \mathbf{B}_r به وسیله بردار موقعیت \mathbf{X} نسبت به یک مبدأ دلخواه، مشخص شده باشد. فرض می‌شود که جسم به طور شبه‌استاتیکی^۳ از پیکربندی \mathbf{B}_r تغییر شکل پیدا کرده و پیکربندی جدید \mathbf{B} با مرز \mathbf{B}_r را اشغال نموده است که از این به بعد به عنوان پیکربندی جاری^۴ یا تغییر شکل یافته^۵ جسم شناخته خواهد شد. این تغییر شکل به وسیلهٔ نگاشت $\mathbf{X}:\mathbf{B}_r \rightarrow \mathbf{B}$ که نقاط \mathbf{X} در \mathbf{B}_r را به نقاط \mathbf{x} در \mathbf{B} انتقال می‌دهد، معرفی می‌شود:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \mathbf{B}_r \quad (1)$$

یعنی \mathbf{X} بردار موقعیت جدید نقطه \mathbf{X} در پیکربندی جدید \mathbf{B} است. تانسور گرادیان تغییر شکل \mathbf{F} ^۶ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{F} = \text{Grad } \mathbf{x} \quad (2)$$

که دارای مؤلفه‌های کارتزین به فرم $F_{i\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha}$ بوده و Grad نماد عملگر گرادیان در \mathbf{B}_r می‌باشد. در مقابل، نماد عملگر گرادیان در \mathbf{B} به صورت grad تعریف می‌شود. بنابر قضیه تجزیه قطبی^۷، گرادیان تغییر شکل می‌تواند به دو صورت یکتای زیر تجزیه شود:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (3)$$

که در آن \mathbf{R} یک تانسور متعامد «مناسب»^۸ $(\det(\mathbf{R}) = +1)$ بوده و \mathbf{U} و \mathbf{V} تانسورهای مثبت معین^۹ و متقارن می‌باشند. بعلاوه \mathbf{U} و \mathbf{V} به ترتیب تانسورهای کشش راست^{۱۰} و چپ^{۱۱} نام دارند. با استفاده از نتایج تجزیه قطبی می‌توان دو معیار تغییر شکل زیر را تعریف کرد:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \quad \mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2 \quad (4)$$

¹ Configuration

² Reference configuration

³ Quasi-statically

⁴ Current configuration

⁵ Deformed configuration

⁶ Deformation gradient tensor

⁷ Polar decomposition theorem

⁸ Proper orthogonal tensor

⁹ Positive definite

¹⁰ Right stretch tensor

¹¹ Left stretch tensor

که **C** و **B** به ترتیب تانسورهای تغییر شکل راست و چپ کوشی-گرین^۱ نام دارند. در مباحث مکانیک محیط‌های پیوسته اما به دلیل مفاهیم فیزیکی که ناوردهای اصلی^۲ دارند و از طرف دیگر این که معادله^۳ مشخصه^۳ کیلی-همیلتون^۴ را نیز ارضا می‌کنند، در اکثر مواقع این ناوردها مورد استفاده قرار می‌گیرند [۲۸]:

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}) = \frac{1}{2} [I_1^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)], I_3 = \det \mathbf{C} \quad (5)$$

دسته مهمی از مواد ناهمسانگرد، مواد تقویت شده با الیاف هستند. در صورتی که الیافها در یک راستا قرار داشته باشند، ماده دارای یک جهت مرجح (جهت الیاف) بوده و در صفحه عمود بر این جهت همسانگرد است. در این حالت ماده را همسانگرد جانبی می‌گویند. برای این مواد، انرژی کرنشی علاوه بر میزان تغییر شکل به جهت الیاف نیز وابسته است. اگر **a** جهت الیاف در مختصات اولیه باشد، با توجه به گروه‌های تقارن مادی همسانگرد جانبی، انرژی کرنشی مواد همسانگرد جانبی تابعی از پنج ناوردهای زیر است [۲۹]:

$$W = W(I_1, I_2, I_3, J_4, J_5) \quad (6)$$

که J_4, J_5 شامل اثرات ناهمسانگردی ماده می‌باشند و به ناوردهای همسانگرد جانبی معروف هستند. ناوردهای J_4 بیانگر مقدار کشیدگی فیبر است و ناوردهای J_5 به صورت زیر در خواهد آمد:

$$J_5 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{C}^2 \mathbf{a} \Rightarrow J_5 = C_{33}^2 + C_{13}^2 + C_{23}^2 \quad (7)$$

که در آن C_{33} بیانگر تغییر طول فیبر، C_{13} ، C_{23} بیانگر تغییر شکل برشی فیبر می‌باشند [۳۰]. تنش‌های پیولای دوم ناشی از تابع انرژی کرنشی مواد همسانگرد جانبی نیز به صورت زیر است [۳۱]:

$$P = 2 \left[\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{C} + I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3} \mathbf{C}^{-1} \right] + 2 \left[\frac{\partial W}{\partial J_4} \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} + \frac{\partial W}{\partial J_5} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{C} \mathbf{a} + \mathbf{C} \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}) \right] \quad (8)$$

مدلسازی ساختاری

در این بخش سعی بر این است که یک تابع انرژی چگالی کرنشی برای مواد همسانگرد جانبی ارائه داده شود به طوری که کاربرد آن در حل تیوب‌های جدار ضخیم استوانه‌ای همسانگرد جانبی مانند رگ انسان باعث سهولت در ارائه یک حل تحلیلی غیر مبهم گردد. ضمن آن که قبل از کاربرد این تابع، بایستی ابتدا کارایی آن را جهت دنبال کردن داده‌های استاندارد آزمایشگاهی بررسی نمود. در نهایت مدل پیشنهادی، برای تابع چگالی انرژی کرنشی این دسته از مواد ارائه می‌شود.

در اینجا چگالی انرژی کرنشی به صورت مجموع انرژی کرنشی ذخیره شده در پایه ماده^۵ و انرژی ذخیره شده ناشی از فیبر و چسبندگی بین فیبر و ماده در نظر گرفته می‌شود [۴؛ ۵؛ ۷؛ ۸].

¹ Right and left Cauchy-Green deformation tensors

² Principal invariants

³ Characteristic equation

⁴ Cayley-Hamilton

⁵ Matrix

(۹)

$$W = W_{iso} + W_{aniso}$$

در این معادله W_{iso} را می‌توان یکی از توابع انرژی کرنشی مواد همسانگرد در نظر گرفت و ارائه تابع W_{aniso} را بایستی طوری در نظر گرفت که علاوه بر برآورده کردن قیود حاکم بر یک تابع چگالی انرژی کرنشی، در اول بتواند نتایج آزمایشگاهی را به خوبی دنبال کند و مهمتر از آن کارایی خوبی را در حل مسائل مقدار مرزی (لوله‌های تحت فشار داخلی) نسبت به سایر توابع ارائه شده داشته باشد.

از جمله قیود حاکم بر تابع انرژی کرنشی به شرح زیر می‌باشند:

برای تمام تغییر شکل‌ها، مقدار تابع چگالی انرژی کرنشی نباید منفی شود.

در زمان نبود تغییر شکل ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$)، مقدار تابع چگالی انرژی کرنشی باید صفر شود.

در زمان نبود تغییر شکل ناشی از عدم بارگذاری، مقدار تابع چگالی انرژی کرنشی باید کمترین مقدار خود را داشته باشد.

به ازای $\lambda_1 = 0$ یا $\lambda_2 = 0$ یا $\lambda_3 = 0$ و $\lambda_1 = \infty$ یا $\lambda_2 = \infty$ یا $\lambda_3 = \infty$ ، مقدار تابع چگالی انرژی کرنشی باید مثبت و معین باشد و برای حالت اول باید بارگذاری خارجی منفی بی‌نهایت (فشار) و حالت دوم مثبت بی‌نهایت (کشش) باشد.

تابع چگالی انرژی باید بیانگر اثرات غیر همسانگردی باشد یا به عبارت دیگر تابعی از J_4, J_5 باشد. از آنجایی که قرار است تابع چگالی انرژی در حل مسائل مقدار مرزی لوله تحت فشار داخلی مورد استفاده قرار

گیرد، لذا منجر به انتگرال‌گیری از جمله $\frac{\lambda_z}{\lambda_z - Q^2} \frac{dW}{dQ}$ می‌گردد. به منظور رفع ابهام نمودن در $\lambda_z = Q^2$

، مشتق تابع چگالی انرژی کرنشی باید دارای جمله‌ی $\lambda_z - Q^2$ باشد.

در این مقاله W_{aniso} ، با توجه به شش قید ذکر شده، یک چند جمله‌ای از جمله زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$2J_4(i_2^2 - 3i_1) - J_5(i_1^2 - 3i_2) \quad (10)$$

در این جمله i_2, i_1 به ترتیب ناوردای اول و دوم تانسور کشیدگی راست \mathbf{U} می‌باشند:

$$i_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad i_2 = \lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1} + \lambda_3^{-1} \quad (11)$$

برای سادگی در کار، تابع W_{iso} را مشابه با تابع مونی-ریولین برحسب I_2, I_1 در نظر گرفته می‌شود:

$$W_{iso} = e_1(I_1 - 3) + e_2(I_2 - 3) \quad (12)$$

که I_2, I_1 به ترتیب ناوردای اول و دوم تانسور تغییر شکل راست کوشی گرین \mathbf{C} می‌باشند [۱۵]:

$$I_1 = i_1^2 - 2i_2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad I_2 = i_2^2 - 2i_1 = \lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2} \quad (13)$$

و همچنین تابع W_{aniso} را می‌توان به صورت چند جمله‌ای از عبارت ۱۰ در نظر گرفت:

$$W_{aniso} = \sum_{i=1}^n C_i (2J_4(i_2^2 - 3i_1) - J_5(i_1^2 - 3i_2))^i \quad (14)$$

که فقط دو جمله اول "،" در نظر گرفته می‌شود در نهایت تابع چگالی انرژی کرنشی ۱۵ حاصل می‌شود:

$$W = e_1(i_1^2 - 2i_2 - 3) + e_2(i_2^2 - 2i_1 - 3) + C_1(2J_4(i_2^2 - 3i_1) - J_5(i_1^2 - 3i_2)) + C_2(2J_4(i_2^2 - 3i_1) - J_5(i_1^2 - 3i_2))^2 \quad (15)$$

که ضرایب e_1 ، e_2 ، C_1 و C_2 پارامترهای مادی بوده و برای مواد مختلف متفاوت می‌باشند.

نحوه تعیین پارامترهای مادی

در این بخش نحوه محاسبه پارامترهای مادی تابع چگالی انرژی شرح داده شده است. مقدار پارامترهای مادی به درجه غیر خطی بودن منحنی نیرو-جابجایی و نوع بارگذاری‌ها در داده‌های آزمایشگاهی بستگی دارد. تعیین پارامترهای مادی تابع چگالی انرژی کرنشی با استفاده از یک روش جدید انجام خواهد گرفت. این روش مبتنی بر انطباق بین مقادیر چگالی انرژی بازسازی شده از آزمایش و تئوری نسبت به انطباق بین تنش‌های حاصل شده از آزمایش و تئوری می‌باشد. به هر حال اگر چه مجموعه‌ای از آزمایش‌های مختلف با منحنی‌های متفاوت بارگذاری، می‌تواند بر روی ماده انجام شود، ولی فقط یک تابع چگالی انرژی کرنشی برای آن می‌توان قائل شد. به این معنی که روش تحلیل رگرسیون حداقل مربعات فقط روی یک تابع، آن هم چگالی انرژی کرنشی به جای چند تابع مختلف تنش-کشیدگی به کار برده می‌شود. انجام این عمل ریاضی ملزم به داشتن مقادیر چگالی انرژی کرنشی آزمایش می‌باشد. کارایی و انطباق تابع پیشنهادی با نتایج تجربی شامل کشش ساده سنجیده می‌شود. پارامترهای مادی موجود (e_1, e_2, C_1, C_2) در تابع پیشنهادی (۱۵)، از انطباق تابع چگالی انرژی با داده‌های تجربی کشش تک محوره در جهت فیبر روی لایه‌های فیبروسی [۳۲] و روی رباط‌ها و تاندون زانوی انسان [۲۷] با استفاده از روش مجموع مربعات باقیمانده در نرم افزار DataFit محاسبه شده است.

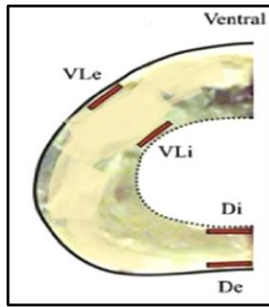
مهره پشت کمر شامل لایه جانبی خارجی VLe^1 ، لایه جانبی داخلی VLi^2 ، لایه پشتی خارجی De^3 و لایه پشتی داخلی Di^4 که در شکل ۱ نشان داده شده‌اند، به دلیل وجود الیاف کولژن در هر لایه، می‌تواند هر یک از آن را ماده همسانگرد جانبی در نظر گرفت.

¹ Ventro-Lateral external

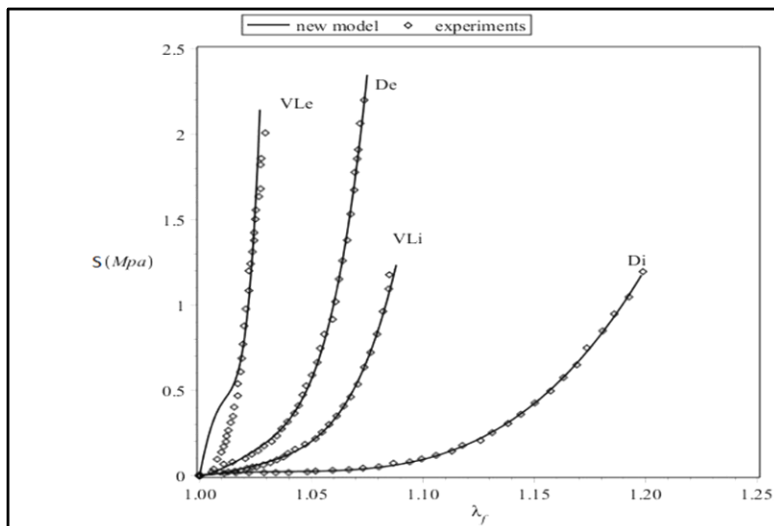
² Ventro-Lateral internal

³ Dorsal external

⁴ Dorsal internal



شکل ۱. لایه‌های حلقه فیبروسی [۳۲]



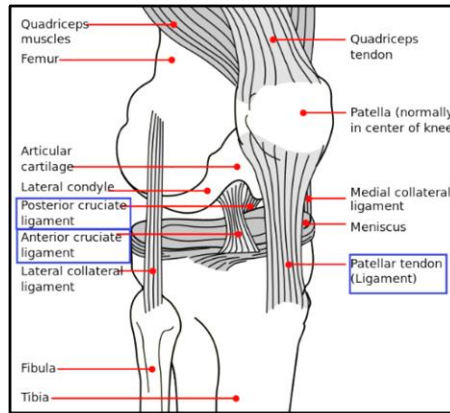
شکل ۲. تنش پیولای اول بر حسب کشیدگی الیاف برای آزمایش کشش تک محوره در جهت فیبر روی لایه‌های حلقه فیبروسی مدل پیشنهادی (۱۵) و نتایج تجربی [۳۲]

مقایسه تنش پیولای اول بر حسب کشیدگی الیاف روی لایه‌های حلقه فیبروسی مدل پیشنهادی و نتایج تجربی در شکل ۲ نشان داده شده است. پارامترهای مادی و انحرافات پیش‌بینی شده (RSS) مدل پیشنهادی از داده‌های تجربی برای لایه‌های حلقه فیبروسی در جدول ۱ آمده است و حداکثر انحراف از داده‌های تجربی [۳۲] $3.75e-5$ مگا پاسکال می‌باشد. با توجه به اردر تنش پیولای اول، مقادیر RSS قابل قبول می‌باشند.

جدول ۱. پارامترهای مادی مدل پیشنهادی (۱۵) برای لایه‌های حلقه فیبروسی با استفاده از داده‌های تجربی [۳۲]

Parameter (Mpa)	RSS	e_1	e_2	C_1	C_2
VLe	۳.۷۵e-۵	-۲۱۳۴۴۰.۰۳۱۱	۲۶۶۲۴۰.۲۶۵۳	-۱۷۵۸۵.۱۱۰۴	-۶۷۶۹.۳۰۷۷
VLi	۶.۷e-۸	-۴۰۴.۱۵۸۵	۵۴۴.۰۰۸۸	-۴۶.۴۶۵۰	-۲۸۶.۷۰۴۶
De	۳.۷۴e-۹	-۱۸۸۸.۸۸۶۵	۲۴۸۳.۶۲۵۹	-۱۹۷.۹۴۲۷	-۱۱۸۲.۳۸۶۳
Di	۴.۷۶e-۶	-۸۵.۷۱۱۶	۹۷.۱۴۳۰	-۳.۴۷۳۵	۰

پارامترهای مادی برای رباط‌ها و تاندون زانوی انسان، شامل رباط متقاطع جلویی^۱ ACL، رباط متقاطع^۲ PCL و تاندون پاتلا^۳ PT که در شکل ۳ نشان داده شده‌اند، با استفاده از روش کمترین مربعات باقیمانده از مقایسه تنش پیولای اول بر حسب کشیدگی الیاف برای آزمایش کشش تک محوره در جهت فیبر روی رباط‌ها و تاندون زانوی انسان مدل پیشنهادی و نتایج تجربی در شکل ۴ محاسبه شده و در جدول ۲ آمده است. انحراف پیش‌بینی شده توسط مدل پیشنهادی از داده‌های تجربی [۲۷] حداکثر ۷-۲.۹۴e-۷ مگاپاسکال می‌باشد. با توجه به اردر تنش پیولای اول، مقادیر RSS قابل قبول می‌باشند.

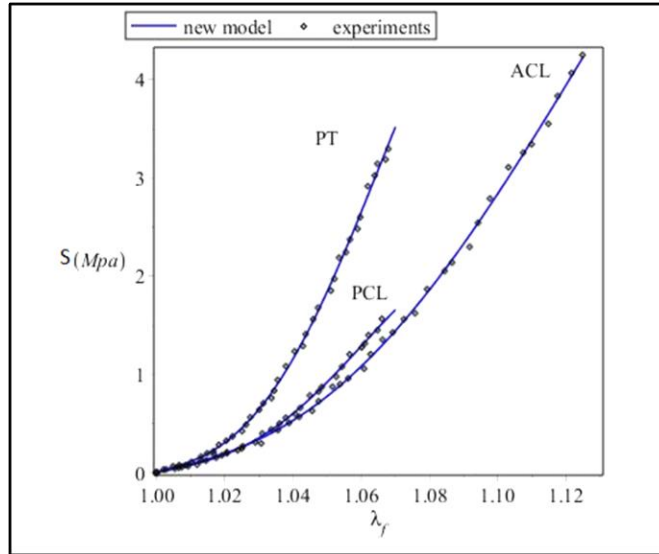


شکل ۳. ساختمان مفصل زانوی انسان [۲۷]

¹ Anterior Cruciate Ligament

² Posterior Cruciate Ligament

³ Patellar Tendon



شکل ۴. تنش پیولای اول بر حسب کشیدگی الیاف برای آزمایش کشش تک محوره در جهت فیبر روی رباطها و تاندون زانوی انسان مدل پیشنهادی (۱۵) و نتایج تجربی [۲۷]

جدول ۲. پارامترهای مادی مدل پیشنهادی (۱۵) برای رباطها و تاندون زانوی انسان با استفاده از داده‌های تجربی [۲۷]

(Mpa) Parameter	RSS	e_1	e_2	C_1	C_2
ACL	$۲.۹۴e-۷$	-۱۳۴.۱۲۴۶	۱۸۲.۳۶۳۹	-۱۴.۲۶۰۳	۱۲۴.۸۱۱۶
PCL	$۱.۳۷e-۸$	۲۸۷.۸۹۳۵	-۳۹۴.۰۰۱۶	۳۷.۱۷۵۸	۶۶۰.۳۱۶۵
PT	$۶.۶۱e-۹$	۵۴۵.۱۱۱۳	-۷۰۳.۸۸۲۵	۵۵.۲۵۳۵	۱۱۸۳.۱۲۶۲

کاربرد معادله ساختاری روی رفتار مکانیکی سازه‌های شبیه تیوب‌های جدار ضخیم

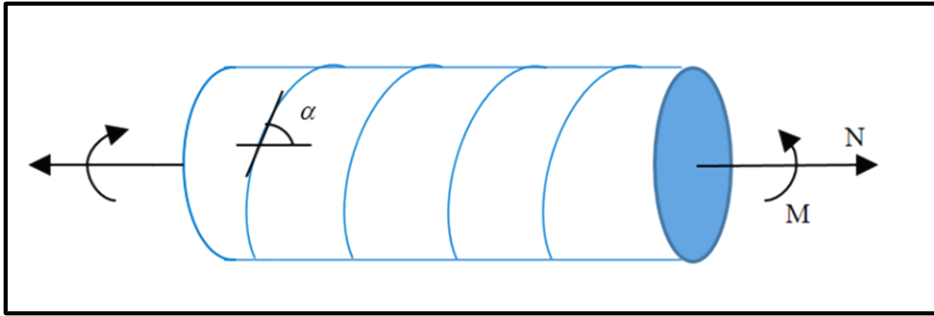
بیماری‌های قلب و عروق، یکی از دلایل مهم مرگ و میر در جهان هستند و ارتباط نزدیکی با دینامیک خون و مکانیک دیواره شریان دارند. نه تنها در سیستم قلبی-عروقی، بلکه در تمام سیستم بدن، قلب مهم‌ترین عضو است که اگر رگ‌های خون‌رسان آن دچار گرفتگی یا تنگی شوند، عملکرد قلب مختل می‌شود. از راهکارهای مفید در بر طرف کردن تنگی عروق قلب انجام عمل بای‌پس^۱ است که در آن از یک رگ جایگزین برای خون رسانی به قلب استفاده می‌کنند؛ بنابراین مطالعه رفتار عروق متداولی که جهت انجام پیوند بای‌پس قلبی مورد استفاده قرار می‌گیرند مهم می‌نماید.

^۱ Bypass

چون حل تحلیلی به سادگی قابل محاسبه نبود تمامی محققان حل را به صورت عددی ارائه کرده‌اند. در این بخش هدف به دست آوردن حل تحلیلی بسته برای توزیع تنش در دیواره تیوب‌های استوانه‌ای جدار ضخیم ساخته شده از مواد همسانگرد جانبی هاپیرالاستیک می‌باشد.

تحلیل تیوب استوانه‌ای همسانگرد جانبی

فرض کنید یک تیوب استوانه‌ای جدار ضخیم همسانگرد جانبی با شعاع داخلی A ، شعاع خارجی B و زاویه الیاف α که در معرض فشار داخلی P_i فشار خارجی P_o نیروی محوری N و کوپل محوری M قرار دارد. شکل ۵ را در نظر بگیرید.



شکل ۵. هندسه استوانه بارگذاری شده

هندسه اولیه سیلندر به صورت زیر است:

$$A \leq R \leq B, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq Z \leq L \quad (16)$$

که در آن (R, θ, Z) مختصات استوانه‌ای ذرات مادی است. توصیف تغییر شکل ذرات مادی در دستگاه مختصات جاری (r, θ, z) به صورت زیر است:

$$r = f(R), \theta = \theta + \tau \lambda_z Z, z = \lambda_z Z \quad (17)$$

که در آن کشیدگی طولی λ_z ثابت بوده و τ پیچش بر واحد طول است.

$$a \leq r \leq b, 0 \leq z \leq l = \lambda_z L \quad (18)$$

که L و l به ترتیب طول اولیه و طول تغییر شکل یافته و a و b به ترتیب شعاع‌های داخلی و خارجی در پیکره جاری می‌باشند. در حالت کلی $f(R)$ ابتدا نامشخص است و شعاع‌های داخلی و خارجی a و b نیز نامعلوم‌اند و با اعمال شرایط مرزی به دست خواهند آمد.

کشیدگی‌های اصلی $\lambda_r, \lambda_\theta, \lambda_z$ متناظر با راستاهای (r, θ, z) به صورت زیر می‌باشند:

$$\lambda_r = \frac{dr}{dR}, \lambda_\theta = \frac{r}{R}, \lambda_z = cte \quad (19)$$

ماده سازنده استوانه، تراکم ناپذیر در نظر گرفته می شود. در نتیجه تغییر شکل حاصل به صورت زیر توصیف می شود:

$$r^2 = \lambda_z^{-1}(R^2 - A^2) + a^2, \quad Q = \frac{R}{r} \quad (20)$$

$$\lambda_r = Q\lambda_z^{-1}, \lambda_\theta = Q^{-1}, \lambda_z = cte \quad (21)$$

جهت مرجح در دستگاه استوانه ای را \mathbf{m} در نظر گرفته، که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{m} = (M_R, M_\theta, M_z) \quad (22)$$

بر اساس معادله ساختاری، مؤلفه های تنش به صورت زیر بیان می شود:

$$\sigma = w_1 \mathbf{B} + 2w_2 (I_1 \mathbf{I} - \mathbf{B}) \mathbf{B} + 2w_4 (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) + 2w_5 (\mathbf{m} \otimes \mathbf{B} \mathbf{m} + \mathbf{B} \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) - PI, \quad w_i = \frac{\partial W}{\partial I_i} \quad (23)$$

در ادامه، حل تیوب جدار ضخیم، برای شرایطی بررسی می شود که پیچش در آنها به واسطه شرایط مرزی صفر باشد ($\tau = 0$). در دستگاه مختصات استوانه ای، معادله تعادل ($div(\sigma) = 0$) به صورت زیر است:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (24)$$

حال با استفاده از مشتق زنجیره ای $\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{d\sigma_r}{dQ} \frac{dQ}{dr}$ ، معادله ۲۴ به صورت زیر باز نویسی می شود:

$$\frac{d\sigma_r}{dQ} \frac{dQ}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (25)$$

بر اساس شرط غیرقابل تراکم بودن ماده می توان نتیجه گرفت:

$$\frac{dQ}{dr} = \frac{\lambda_z Q^{-1} - Q}{r} \quad (26)$$

$$\sigma_r = \widehat{W}(Q) - \int \left(\frac{\lambda_z}{\lambda_z - Q^2} \frac{d\widehat{W}}{dQ} \right) dQ + c_1 \quad (27)$$

که $\lambda_a = \frac{a}{A}$ کشیدگی محیطی لایه داخلی تیوب است. ثابت مجهول c_1 ، با استفاده از یکی از شرایط مرزی مکانیکی

زیر تعیین می شود:

$$\sigma_r|_{Q_i=\lambda_a^{-1}} = -P_i, \quad \sigma_r|_{Q_o=\lambda_b^{-1}} = -P_o \quad (28)$$

که در آن $\lambda_a = a/A$ و $\lambda_b = b/B$ به ترتیب کشش‌های محیطی در شعاع‌های داخلی و خارجی هستند. به سادگی می‌توان نشان داد این کشیدگی‌ها مستقل نیستند و با استفاده از رابطه زیر به هم مربوط می‌شوند:

$$\lambda_a^2 = \frac{\lambda_b^{-2}(\eta^2 - 1) + \lambda_z}{\lambda_z \eta^2 \lambda_b^{-2}} \quad (29)$$

که $\eta = \frac{A}{B}$ نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی در پیکره اولیه می‌باشد. فرض کنید تیوب استوانه‌ای تحت بارگذاری به نحوی تغییر شکل دهد که شکل استوانه‌ای آن حفظ شود و $\Delta P = P_i - P_o$ نشان دهنده اختلاف فشار بین سطوح داخلی و خارجی باشد:

$$\Delta P = -\sigma_r(Q_i = \lambda_a^{-1}) + \sigma_r(Q_o = \lambda_b^{-1}) \quad (30)$$

برای ثابت نگه داشتن طول، بار محوری N باید بر دو انتهای سیلندر وارد شود. این نیرو از رابطه زیر برای سیلندر انتها باز حاصل می‌شود:

$$N = \int_a^b 2\pi r \sigma_z(r) dr \quad \text{or} \quad N = \int_{Q_i}^{Q_o} \frac{2\pi c Q \lambda_z}{(\lambda_z - Q^2)^2} \sigma_z(Q) dQ \quad (31)$$

و همچنین نیروی محوری برای سیلندر انتها بسته از رابطه ۳۲، قابل محاسبه است:

$$N = \int_a^b 2\pi r \sigma_z(r) dr - \pi a^2 \Delta P$$

$$\text{or} \quad (32)$$

$$N = \int_{Q_i}^{Q_o} \frac{2\pi c Q \lambda_z}{(\lambda_z - Q^2)^2} \sigma_z(Q) dQ - \pi a^2 \Delta P(Q)$$

که در روابط بالا $c = a^2 - \lambda_z^{-1} A^2$ است. برای ثابت نگه داشتن θ ، گشتاور M باید بر دو انتهای سیلندر وارد شود. این گشتاور از رابطه زیر برای سیلندر انتها باز و بسته حاصل می‌شود:

$$M = \int_a^b 2\pi r^2 \sigma_{\theta z}(r) dr \quad (33)$$

بحث و نتایج

در این بخش توصیف تغییر شکل و تحلیل تنش برای حالت‌های مختلف بارگذاری تیوب استوانه‌ای همسانگرد جانبی با وجود نیروی محوری انجام گرفته است.

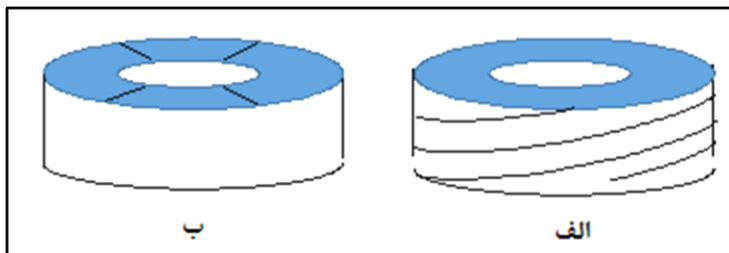
تحلیل توصیف تغییر شکل و تحلیل تنش برای حالت‌های مختلف بارگذاری تیوب استوانه‌ای همسانگرد جانبی با توجه به بارگذاری متقارن نیرویی و متقارن هندسی، شرط عدم وجود تنش برشی ($\sigma_{r\theta} = 0, \sigma_{rz} = 0$) بایستی برآورده شود. با کمک معادله ساختاری ۳۴۰، مؤلفه‌های برشی تانسور تنش از جمله $\sigma_{r\theta}, \sigma_{rz}$ به شرح زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned}\sigma_{r\theta} &= \mathbf{e}_r \cdot (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_\theta) \\ &= 2\lambda_r M_R \{ \lambda_\theta M_\theta [w_4 + (\lambda_r^2 + \lambda_\theta^2 + \gamma^2 \lambda_z^2) w_5] \\ &\quad + \gamma \lambda_z M_z [w_4 + (\lambda_r^2 + \lambda_\theta^2 + \gamma^2 \lambda_z^2 + \lambda_z^2) w_5] \}\end{aligned}\quad (34)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{rz} &= \mathbf{e}_r \cdot (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_z) \\ &= 2\lambda_r M_R \{ \lambda_\theta \gamma \lambda_z^2 M_\theta w_5 + \lambda_z M_z [w_4 + (\lambda_r^2 + \gamma^2 \lambda_z^2 + \lambda_z^2) w_5] \}\end{aligned}$$

برای این که دو شرط $\sigma_{r\theta} = 0, \sigma_{rz} = 0$ با هم ارضا شوند. نتیجه می‌گردد که باید دو حالت برای چیدمان الیاف وجود داشته باشد همان‌طور که در شکل ۶ نشان داده شده است:

- ۱- باید $M_R = 0$ باشد که در این صورت الیاف به شکل مارپیچ روی محیط استوانه پیچیده‌اند.
- ۲- باید $M_\theta = M_z = 0$ باشند که در این حالت الیاف به صورت شعاعی می‌باشند.



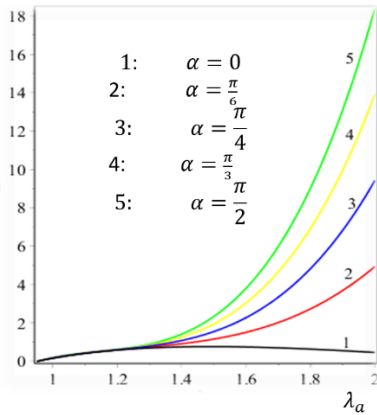
شکل ۶. الف: الیاف مارپیچ ب: الیاف شعاعی

به منظور اعمال شرط عدم پیچش روی محور، بایستی یک کوپل پیچشی به دو انتهای آن اعمال گردد. قابل ذکر است که تیوب استوانه‌ای از ماده Di ساخته شده و چیدمان الیاف در آن به صورت شعاعی و مارپیچ هستند. از ثوابت مادی به‌دست آمده برای ماده Di که در جدول ۱ برای حل استفاده شده است.

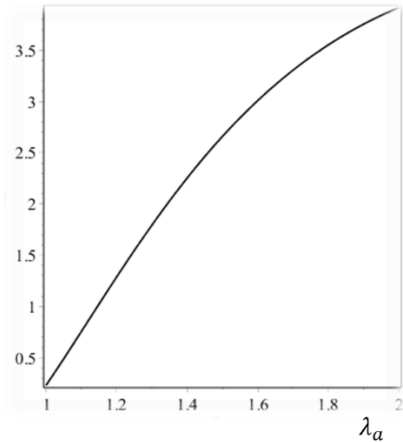
تیوب استوانه‌ای همسانگرد جانبی ساخته شده از Di با وجود نیروی محوری

یک تیوب سیلندری با نسبت شعاع بیرونی به داخلی برابر $\eta = 0.5$ ، تحت نیروی محوری N و فشار داخلی P_i در نظر بگیرید. ضمن این که در تمام بارگذاری‌ها، میزان کرنش طولی تیوب ثابت ($\lambda_z = 1.1$) یا به عبارتی دیگر به میزان ده درصد افزایش طول را دارا باشد، فرض شده است. به‌طور واضح، دو سر باز یا بسته بودن تیوب و همچنین جهت‌گیری الیاف و ذات ماده زمینه و ذات الیاف می‌تواند بر روی رفتار مکانیکی تیوب تأثیر داشته باشد، اما در اینجا ذات

مادهٔ زمینه و الیاف ثابت و ساخته شده از ماده Di در نظر گرفته شده است و تنها دو عامل دو سر باز بودن یا بسته بودن آن و همچنین جهت‌گیری الیاف روی رفتار مکانیکی یک تیوب همسانگرد جانبی بررسی شده است. شکل ۷ مقدار فشار داخلی بر حسب انبساط محیط داخلی (کشیدگی محیط داخلی) یک تیوب سیلندری با الیاف شعاعی و هندسه $\eta = 0.5$ تحت کشیدگی طولی ۱.۱ را نشان می‌دهد. به‌طور واضح به منظور داشتن انبساط محیط داخلی بیشتر، فشار مورد نیاز برای این موضوع بیشتر می‌شود و نحوهٔ تغییرات آن در شکل مورد نظر به تصویر کشیده شده است. علاوه بر آن، شکل ۸ فشار داخلی مورد نیاز برای منبسط کردن محیط داخلی (کشیدگی محیطی) یک تیوب با الیاف ماریپیچ، برای زوایای مختلف الیاف $\alpha = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ را نشان می‌دهد. با توجه به شکل ۸ مشاهده می‌گردد که زاویهٔ الیاف ماریپیچ می‌تواند به شدت بر روی فشار مورد نیاز برای منبسط کردن محیط داخلی، تاثیرگذار باشد. برای مثال به منظور رسیدن به یک سطح یکسان از انبساط در محیط داخلی، فشار مورد نیاز برای این انبساط داخلی با افزایش زاویهٔ ماریپیچ الیاف به شدت افزایش می‌یابد، چرا که افزایش زاویهٔ ماریپیچ الیاف در تیوب باعث مقاومت بیشتر آن در مقابل انبساط می‌گردد و این به منزلهٔ اعمال فشار بیشتر برای رسیدن به سطح یکسان از انبساط در تیوب می‌گردد.

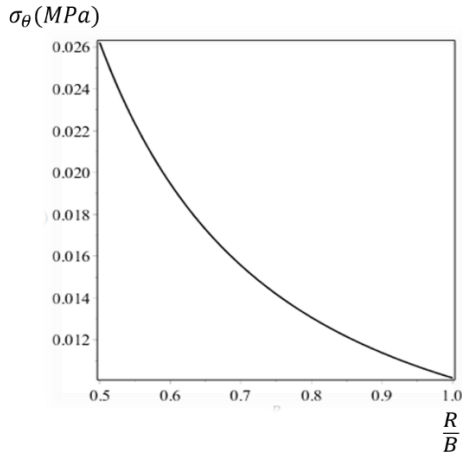
 $\Delta P (MPa)$ 

شکل ۸. فشار بر حسب انبساط محیط داخلی تیوب با وجود الیاف ماریپیچ

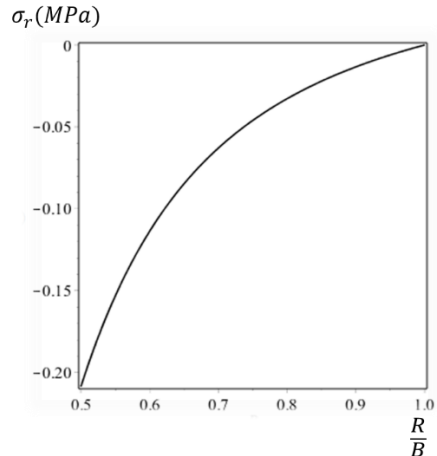
 $\Delta P (MPa)$ 

شکل ۷. فشار بر حسب انبساط محیط داخلی تیوب با وجود الیاف شعاعی

شکل‌های ۹ و ۱۰ به ترتیب تنش شعاعی و محیطی بوجود آمده را در لایه‌های تیوب با الیاف شعاعی بر حسب موقعیت آنها (R/B) تحت کشیدگی طولی $\lambda_z = 1.1$ نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل ۱۰ مشاهده می‌گردد، بیشترین تنش محیطی حاصل شده در لایهٔ داخل تیوب رخ می‌دهد و ضمن این‌که با دور شدن از لایهٔ داخلی، میزان تنش محیطی آنها کمتر می‌گردد. علاوه بر آن، تنش فشاری به‌وجود آمده در بین لایه‌ها، با دور شدن از لایه داخلی کمتر می‌شود.

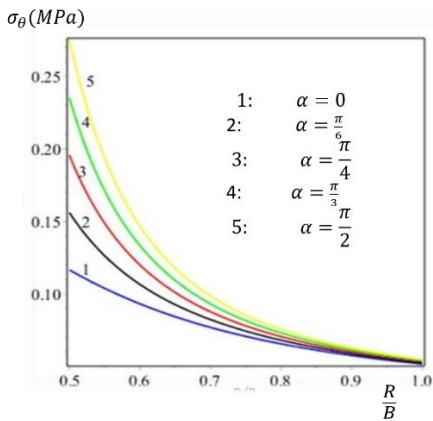


شکل ۱۰. توزیع تنش محیطی در تیوب با وجود یلاف شعاعی

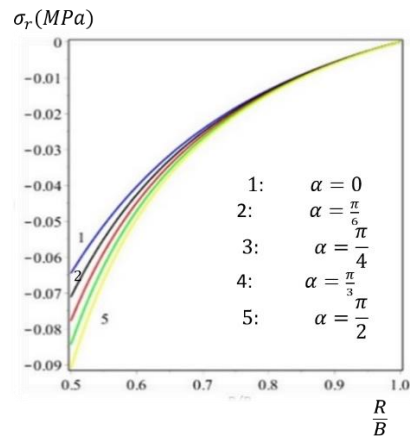


شکل ۹. توزیع تنش شعاعی در تیوب با وجود یلاف شعاعی

همچنین شکل‌های ۱۱ و ۱۲ به ترتیب توزیع تنش شعاعی و محیطی برای یک تیوب سیلندری همسانگرد جانبی با وجود یلاف مارپیچ در زوایای متفاوت تحت کشیدگی طولی $\lambda_z = 1.1$ را نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل‌ها مشاهده می‌گردد، مقدار تنش به راستای یلاف وابسته بوده و با افزایش زاویه راستای یلاف، مقاومت و استحکام تیوب در مقابل بارگذاری فشار داخلی بیشتر می‌گردد، و به تبع آن تنش‌های بیشتر در این دسته از مخازن انتظار می‌رود.



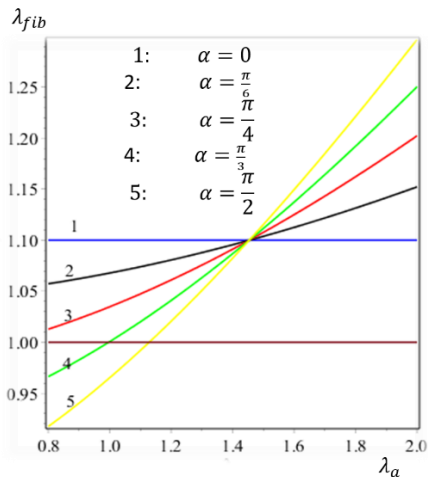
شکل ۱۲. توزیع تنش محیطی در تیوب با یلاف مارپیچ



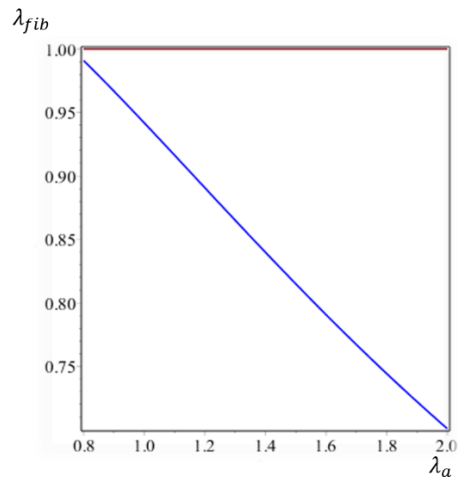
شکل ۱۱. توزیع تنش شعاعی در تیوب با یلاف مارپیچ

شکل‌های ۱۳ و ۱۴ کشیدگی یلاف را بر حسب انبساط محیط داخلی برای دو نوع چیدمان متفاوت از یلاف، راستای شعاعی و جهت‌گیری مارپیچ را برای یک تیوب با هندسه $\eta = 0.5$ تحت کشیدگی طولی $\lambda_z = 1.1$ را نشان می‌دهد.

لازم به ذکر است، از آنجایی که الیاف در برابر فشار هیچ مقاومتی ندارند، " در نتیجه برای حالتی که کشیدگی الیاف کمتر از یک شود، در حقیقت وجود الیاف هیچ مزیتی ندارد و گویی که ماده بدون الیاف شده است و می توان برای این حالت، رفتار ماده همسانگرد جانبی را شبیه رفتار ماده زمینه و به صورت یک ماده همسانگرد در نظر گرفت.

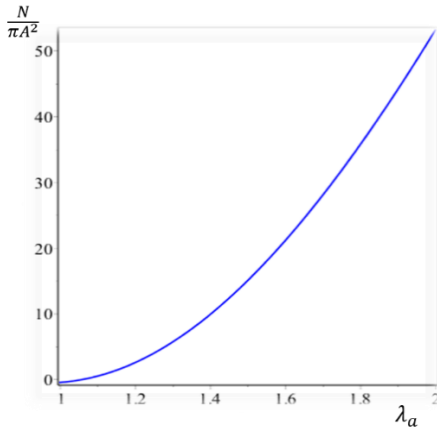


شکل ۱۴. کشیدگی فیبر بر حسب کشیدگی محیطی برای الیاف مارپیچ

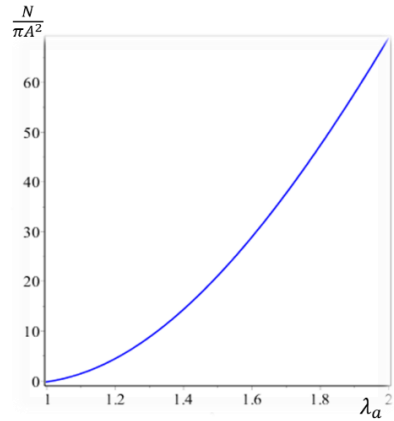


شکل ۱۳. کشیدگی فیبر بر حسب کشیدگی محیطی برای الیاف شعاعی

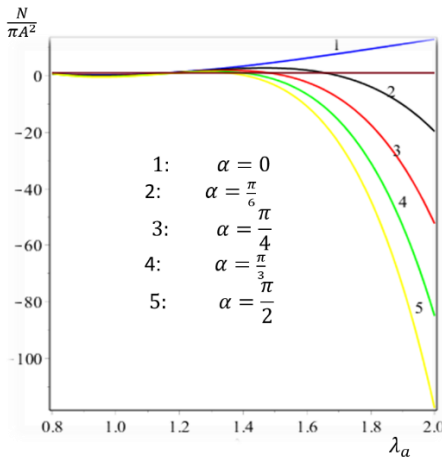
نیروی محوری لازم بر حسب انبساط محیط داخلی در دو حالت تیوب دو سر باز و دو سر بسته با کشیدگی طولی $\lambda_z = 1.1$ ، به ترتیب در " شکل ۱۵ و ۱۶ " آورده شده است. نیروی محوری به هندسه تیوب، باز یا بسته بودن دو سر آن و همچنین جهت گیری الیاف در تیوب بستگی خواهد داشت. با توجه به این که حالت الیاف شعاعی نسبت به حالت الیاف مارپیچ، باعث سختی کمتری از تیوب در دو راستای شعاعی و طولی می گردد، از این رو نیروی محوری کمتری برای افزایش ده درصدی طول تیوب با الیاف شعاعی انتظار می رود. ضمن این که برای مخازن دو سر بسته، فشار داخلی تیوب یک نیروی کمکی برای افزایش طول تیوب می گردد، از این رو همین فشار داخلی در مخازن دو سر بسته، به صورت خودبخود باعث افزایش ده درصدی یا بیشتر در طول تیوب می گردد. بنابراین نیروی محوری فشاری در بعضی از حالت ها نشان از این را دارد که فشار داخلی بالای تیوب باعث افزایش بیش از ده درصدی در طول تیوب گردیده و به این منظور باید یک نیروی فشاری برای کمتر شدن افزایش طول، روی آن اعمال گردد تا این که تنها شاهد افزایش ده درصدی در طول تیوب بود. همچنین نیروی محوری لازم برای داشتن افزایش طول ده درصدی در طول تیوب در دو حالت دو سر باز و دو سر بسته با وجود الیاف مارپیچ در زوایای متفاوت در " شکل ۱۷ و ۱۸ " آورده شده است. همان طور که مشاهده می شود نیروی محوری به شدت وابسته به زاویه الیاف مارپیچ است و در یک کشیدگی طولی یکسان ($\lambda_z = 1.1$)، با افزایش زاویه الیاف مارپیچی، نیروی محوری کمتری لازم می گردد چرا که فشار داخلی آنها افزایش یافته و این افزایش فشار منجر به افزایش طول آنها شده و در نتیجه نیروی محوری کمتری برای افزایش طول لازم می شود.



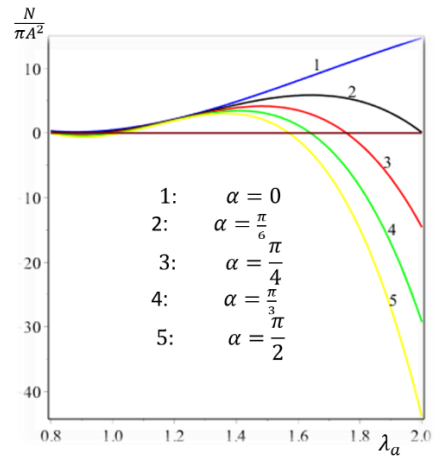
شکل ۱۶. نیروی محوری بر حسب کشیدگی محیطی برای تیوب باز با الیاف شعاعی به ازای $\lambda_z = 1.1$ و $\eta = 0.5$.



شکل ۱۵. نیروی محوری بر حسب کشیدگی محیطی برای تیوب بسته با الیاف شعاعی به ازای $\lambda_z = 1.1$ و $\eta = 0.5$.



شکل ۱۸. نیروی محوری بر حسب کشیدگی محیطی برای تیوب بسته به ازای $\lambda_z = 1.1$ و $\eta = 0.5$.



شکل ۱۷. نیروی محوری بر حسب کشیدگی محیطی برای تیوب باز به ازای $\lambda_z = 1.1$ و $\eta = 0.5$.

نتیجه گیری

هدف از انجام این مقاله، ارائه تابع چگالی انرژی کرنشی برای مواد هایپرالاستیک همسانگرد جانبی تراکم ناپذیر بود که به طور خودکار حل تحلیلی نامبهم بدون وجود ترم انتگرالی مبهم برای توزیع تنش، تغییر شکل و نیروی محوری تیوب‌های سیلندری ساخته شده از مواد همسانگرد جانبی را محقق کند. به این منظور عامل مبهم کننده در حل تحلیلی تیوب استوانه‌ای را شناخته و تابع انرژی کرنشی را به گونه‌ای تعریف کرده که علاوه بر ویژگی‌های اصلی تابع چگالی انرژی، این رفع ابهام در انتگرال‌گیری را نیز تضمین کند. ابتدا یک فرم کلی برای تابع چگالی انرژی کرنشی مواد همسانگرد

جانبی تراکم ناپذیر بر اساس تجزیهٔ جمعی تابع انرژی کرنشی که شامل انرژی ذخیره‌شده در مادهٔ زمینه و انرژی ذخیره‌شده در فیبر را در نظر گرفته، ارائه‌شده است. انرژی ذخیره شده در فیبر چند جمله‌ای از ناوردای اول و دوم و ناوردهای همسانگرد جانبی (J_4 و J_5) می‌باشد. از مزایای دیگر تابع چگالی انرژی کرنشی پیشنهادی، وجود تنها چهار پارامتر مادی (C_2, C_1, e_2, e_1) در آن است. که از انطباق با تست‌های استاندارد تجربی برای گروهی از مواد همسانگرد جانبی، مقادیر آنها تعیین شده است. انطباق خوب بین نتایج حاصل از تابع انرژی پیشنهادی و آزمایش کشش تک محوره در جهت فیبر روی لایه‌های فیبروسی و رباطها و تاندون زانوی انسان انجام شده است. مقادیر RSS ، برای موادی مانند PT و PCL ، ACL ، Di ، De ، VLi ، VLe به ترتیب $3.75e-5$ ، $6.7e-8$ ، $3.74e-9$ ، $4.76e-6$ ، $2.94e-7$ و $1.37e-8$ و $6.61e-9$ قابلیت بالای تابع چگالی انرژی پیشنهادی در مدل کردن تنش و تغییر شکل‌ها را نشان می‌دهد. تمرکز بر روی رفتار مکانیکی تیوب‌های استوانه‌ای جدار ضخیم ساخته شده از مواد همسانگرد جانبی بود که با کمک حل تحلیلی نامبهم توزیع تنش، تغییر شکل و نیروی محوری برای تیوب استوانه‌ای ساخته شده از Di در قالب نمودار در شکل‌های ۷ تا ۱۸ ارائه و بررسی شد.

References

- [1] Beer, F., Johnston, E., DeWolf, J., & Mazurek, D. (2015). *Mechanics of materials* (7 ed.). McGraw-Hill. <https://www.amazon.com/Mechanics-Materials-7th-Ferdinand-Beer/dp/0073398233>
- [2] Treloar, L. (2005). *The physics of rubber elasticity* (3 ed.). Oxford University Press. <https://www.amazon.com/Physics-Elasticity-Classic-Physical-Sciences/dp/0198570279>
- [3] Ogden, R. W. (1997). *Non-linear elastic deformations*. Dover Publications. <https://www.amazon.com/Non-Linear-Elastic-Deformations-Mechanical-Engineering/dp/0486696480>
- [4] Qiu, G. Y., & Pence, T. J. (1997). Remarks on the Behavior of Simple Directionally Reinforced Incompressible Nonlinearly Elastic Solids. *Journal of Elasticity*, 49(1), 1-30. <https://doi.org/10.1023/A:1007410321319>
- [5] Merodio, J., & Ogden, R. W. (2005). Mechanical response of fiber-reinforced incompressible non-linearly elastic solids. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40(2), 213-227. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2004.05.003>
- [6] Arghavani Hadi, J. (2005). *Presenting structural relations and energy function of hyperelastic materials in terms of Hill strains* [Master, Sharif Industrial]. Tehran, Iran. <http://library.sharif.ir/parvan/resource/286746/>
- [7] Guo, Z. Y., Peng, X. Q., & Moran, B. (2007). Mechanical response of neo-Hookean fiber reinforced incompressible nonlinearly elastic solids. *International Journal of Solids and Structures*, 44(6), 1949-1969. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.08.018>
- [8] Horgan, C. O., & Saccomandi, G. (2005). A new constitutive theory for fiber-reinforced incompressible nonlinearly elastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 53(9), 1985-2015. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2005.04.004>
- [9] Holzapfel, G. A., Gasser, T. C., & Ogden, R. W. (2000). A New Constitutive Framework for Arterial Wall Mechanics and a Comparative Study of Material Models. *Journal of elasticity and the physical science of solids*, 61(1), 1-48. <https://doi.org/10.1023/A:1010835316564>
- [10] Itskov, M., & Aksel, N. (2004). A class of orthotropic and transversely isotropic hyperelastic constitutive models based on a polyconvex strain energy function. *International Journal*

- of Solids and Structures*, 41(14), 3833-3848. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.02.027>
- [11] Markert, B., Ehlers, W., & Karajan, N. (2005). A general polyconvex strain-energy function for fiber-reinforced materials. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 5(1), 245-246. <https://doi.org/10.1002/pamm.200510099>
- [12] Ciarletta, P., Izzo, I., Micera, S., & Tendick, F. (2011). Stiffening by fiber reinforcement in soft materials: A hyperelastic theory at large strains and its application. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 4(7), 1359-1368. <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2011.05.006>
- [13] Shearer, T. (2015). A new strain energy function for modelling ligaments and tendons whose fascicles have a helical arrangement of fibrils. *Journal of Biomechanics*, 48(12), 3017-3025. <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2015.07.032>
- [14] Taghizadeh, D. M., & Darijani, H. (2018). Mechanical Behavior Modeling of Hyperelastic Transversely Isotropic Materials Based on a New Polyconvex Strain Energy Function. *International Journal of Applied Mechanics*, 10(09), 1850104. <https://doi.org/10.1142/s1758825118501041>
- [15] Adkins, J. E., & Rivlin, R. S. (1952). Large elastic deformations of isotropic materials IX. The deformation of thin shells. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 244(888), 505-531. <https://doi.org/10.1098/rsta.1952.0013>
- [16] Alexander, H. (1971). Tensile instability of initially spherical balloons. *International Journal of Engineering Science*, 9(1), 151-160. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(71\)90017-6](https://doi.org/10.1016/0020-7225(71)90017-6)
- [17] Needleman, A. (1977). Inflation of spherical rubber balloons. *International Journal of Solids and Structures*, 13(5), 409-421. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(77\)90036-1](https://doi.org/10.1016/0020-7683(77)90036-1)
- [18] Haughton, D. M., & Ogden, R. W. (1978). On the incremental equations in non-linear elasticity — II. Bifurcation of pressurized spherical shells. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 26(2), 111-138. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(78\)90017-0](https://doi.org/10.1016/0022-5096(78)90017-0)
- [19] Haseganu, E. M., & Steigmann, D. J. (1994). Theoretical flexural response of a pressurized cylindrical membrane. *International Journal of Solids and Structures*, 31(1), 27-50. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(94\)90173-2](https://doi.org/10.1016/0020-7683(94)90173-2)
- [20] Merritt, D. R., & Weinhaus, F. (1978). The pressure curve for a rubber balloon. *American Journal of Physics*, 46(10), 976-977. <https://doi.org/10.1119/1.11486>
- [21] Pamplona, D., Gonçalves, P., Davidovich, M., & Weber, H. I. (2001). Finite axisymmetric deformations of an initially stressed fluid-filled cylindrical membrane. *International Journal of Solids and Structures*, 38(10-13), 2033-2047. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(00\)00151-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00151-7)
- [22] Pamplona, D. C., Gonçalves, P. B., & Lopes, S. R. X. (2006). Finite deformations of cylindrical membrane under internal pressure. *International Journal of Mechanical Sciences*, 48(6), 683-696. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2005.12.007>
- [23] Vangerko, H., & Treloar, L. (2001). The Inflation and Extension of Rubber Tube for Biaxial Strain Studies. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 11(14), 1969. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/11/14/009>
- [24] Miller, K., & Chinzei, K. (2002). Mechanical properties of brain tissue in tension. *Journal of Biomechanics*, 35(4), 483-490. [https://doi.org/10.1016/S0021-9290\(01\)00234-2](https://doi.org/10.1016/S0021-9290(01)00234-2)

- [25] Gao, Z., Lister, K., & Desai, J. P. (2010). Constitutive Modeling of Liver Tissue: Experiment and Theory. *Annals of Biomedical Engineering*, 38(2), 505-516. <https://doi.org/10.1007/s10439-009-9812-0>
- [26] Ogden, R. W., & Schulze-Bauer, C. A. J. (2000, November 5-10). *Phenomenological and Structural Aspects of the Mechanical Response of Arteries*. ASME 2000 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Orlando, Florida, USA. <https://doi.org/10.1115/IMECE2000-1926>
- [27] Hamdaoui, M. E., Merodio, J., Ogden, R. W., & Rodríguez, J. (2014). Finite elastic deformations of transversely isotropic circular cylindrical tubes. *International Journal of Solids and Structures*, 51(5), 1188-1196. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.12.019>
- [28] Basar, Y., Weichert, D., & Petrolito, J. (2001). Nonlinear continuum mechanics of solids: fundamental mathematical and physical concepts. *Applied Mechanics Reviews*, 54(6), B98-B99. <https://doi.org/10.1115/1.1421109>
- [29] Spencer, A. (1982, June 19-22). *The formulation of constitutive equation for anisotropic solids*. Mechanical Behavior of Anisotropic Solids/Comportment Mécanique des Solides Anisotropes, Villard-de-Lans, France. https://doi.org/10.1007/978-94-009-6827-1_1
- [30] Sedighi, F., Darijani, H., & Darijani, F. (2021). A novel phenomenological viewpoint for transversely isotropic hyperelastic materials; a new strain energy density function. *International Journal of Solids and Structures*, 225, 111064. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2021.111064>
- [31] Holzapfel, G. A. (2002). Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering science. *Meccanica*, 37(4), 489-490. <https://doi.org/10.1023/A:1020843529530>
- [32] Holzapfel, G. A., Schulze-Bauer, C. A. J., Feigl, G., & Regitnig, P. (2005). Single lamellar mechanics of the human lumbar anulus fibrosus. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*, 3(3), 125-140. <https://doi.org/10.1007/s10237-004-0053-8>