



## Investigation of Thermal Boundary Layer over a Wedge with Variable Temperature Surface

Seyad Morteza Moghimi<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Qaemshahr Branch, Islamic Azad University, Qaemshahr, Iran.

### ARTICLE INFO

#### Article Type:

Original Research

**Received:** 01.02.2022

**Revised:** 06.04.2022

**Accepted:** 06.29.2022

#### Keyword:

Thermal Boundary Layer  
Variable Temperature  
Modified Collocation Method  
Numerical Method  
Falkner-skan

#### \*Corresponding Author:

Seyad Morteza Moghimi

#### Email:

[moghimi4999@yahoo.com](mailto:moghimi4999@yahoo.com)

### ABSTRACT

In the present research, the temperature distribution in the thermal boundary layer on a wedge was investigated. Boundary layer PDE equations of continuity, momentum and energy based on Falkner-Scan model with variable wall temperature conditions for laminar, stable and incompressible flow were obtained and using a similar solution to simple differential equations of momentum and energy by applying variable wall temperature ( $n$  coefficient) was presented in a new form. To solve the resulting equations, according to the infinite boundary condition, the modified integrated semi-analytical method was used. The results obtained from this method were compared with the numerical method for a specific condition in the Prandtl number ( $Pr$ ) and the maximum error was 0.020%. With the increase of  $n$  from 0.5 to 1.5 and the Prandtl number ( $Pr$ ) from 0.7 to 10 for the flow with different angles, the thickness of the thermal boundary layer grew faster; thus, the Nusselt number ( $Nu$ ) which has a direct relationship with the thermal boundary layer thickness gradient also increased. Where  $Pr=1$  and slope equaled 90 degrees,  $Nu$  increased by 36.5% with an increase of  $n$  to 1.5. In the expansion corner (negative angle), the flow behavior on the wedge was the same by increasing  $Pr$ . However, by increasing the power of the variable wall temperature, the thickness of the thermal boundary layer increased and the slope of the thermal boundary layer decreased, consequently reducing  $Nu$  such that the  $Nu$  in the separation point decreased by 14.5 % by increasing  $n$  to 1.5.



---

**EXTENDED ABSTRACT**


---

**Introduction**

Investigating the boundary layer flow over a wedge (flow with pressure gradient) is one of the important issues in fluid mechanics and used in the production of adhesive tapes, pipes and polymer part of equipment by using the extrusion method. First, non-linear partial differential equations of flow over a wedge with a variable temperature surface were transformed into ordinary equations using a similarity solution, not previously presented in the literature. Moreover, due to an infinite boundary condition, the semi-analytical collocation method was used with a variable change, which was also innovative.

**Methodology**

Figure (1) shows a viscose and incompressible fluid flow over a wedge where the x-axis is in addition to the flow and the y-axis is normal to the flow. The surface temperature is variable and equals  $T_w = T_1 + \lambda x^n$  where  $\lambda$  is a constant coefficient and  $n$  is the variable temperature index. The surface temperature ( $T_w$ ) is considered greater than the free stream temperature ( $T_1$ ).

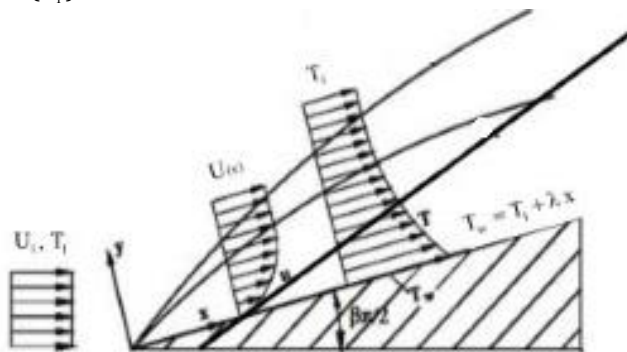


Figure 1. Schematic of problem.

Boundary layer equations of continuity, momentum and energy assume that Newtonian, incompressible, two-dimensional and for laminar fluid flow will be in order:

$$\frac{\partial u_{(x,y)}}{\partial x} + \frac{\partial v_{(x,y)}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$u_{(x,y)} \frac{\partial u_{(x,y)}}{\partial x} + v_{(x,y)} \frac{\partial v_{(x,y)}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_{(x,y)}}{\partial y^2} \quad (2)$$

$$u_{(x,y)} \frac{\partial T}{\partial x} + v_{(x,y)} \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3)$$

Simple nonlinear equations were taken from above equations by using similarity solution as follows:

$$f'''(\eta) + f(\eta)f''(\eta) + \beta(1 - f'^2(\eta)) = 0 \quad (4)$$

$$\theta'' + Pr f_{(\eta)} \theta' + n\beta Pr f'_{(\eta)} (1 - \theta) = 0 \quad (5)$$

The momentum and energy equations respectability, and boundary condition are as follows:

$$\eta = 0 \rightarrow f(\eta) = f'(\eta) = 0, \theta = 0 \quad (6)$$

$$\eta \rightarrow \infty \rightarrow f'(\eta) = 1, \theta = 1 \quad (7)$$

Both the semi-analytical collocation method and numerical 4th-order Runge-Kutta were used to solve the problem. Furthermore, due to the existence of an infinite boundary layer, this infinite boundary condition was transformed into a finite one via an innovative variable change.

### Results and discussion

Figure (2) shows the effect of  $n$  on the dimensionless temperature distribution  $\theta$ , in which the thermal boundary layer becomes thinner with the increase of  $n$ . Therefore, it reaches the free flow temperature at a smaller distance on the surface. The maximum thermal boundary layer thickness was generated when the wall temperature was constant ( $n=0$ ).

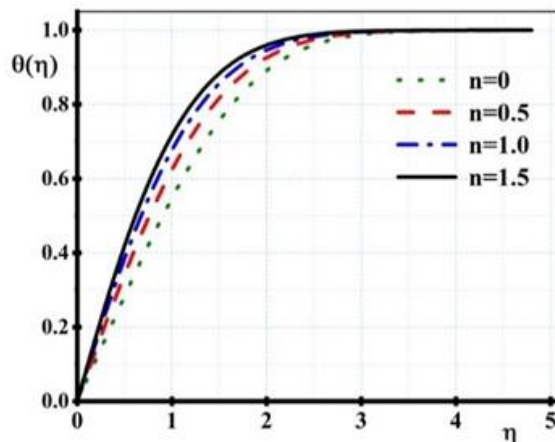


Figure 2. Effect  $n$  on the nondimensional distribution temperature where  $Pr=1$  and  $\beta = 1$ .

As per Figure (3), for flow on the wedge with positive  $\beta$ , the Nusselt number increased with the increase of  $n$ , and for the same  $n$ , the Nusselt value also increased by increasing the wedge angle. In flow on the expansion wedge ( $\beta < 0$ ), when  $n$  increases, the Nusselt number was reduced, and for the same  $n$ , the Nusselt number decreased by increasing  $\beta$ .

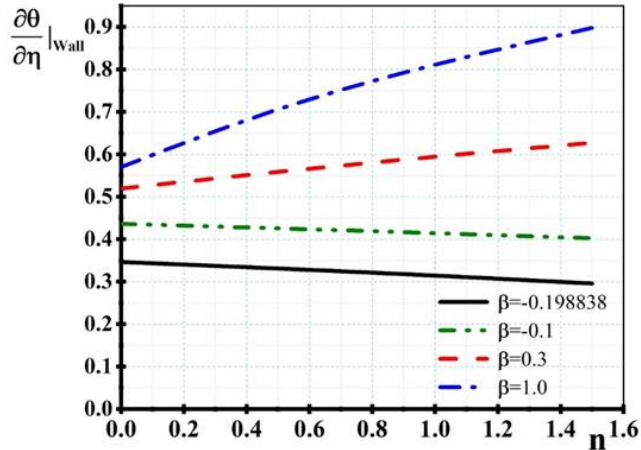



Figure 3. Effect n on the Nusselt number where  $Pr=1$  and  $\beta = 1$ .

### Conclusion

By increasing  $n$  from 0.5 to 1.5 and  $Pr$  from 0.7 to 10, the thermal boundary layer developed faster; thus, the Nusselt number ( $Nu$ ), which had a direct relationship with the thermal boundary layer thickness gradient, was also increased. For  $Pr=1$  and angle equal to  $90^\circ$ ,  $Nu$  increased by 36.5% when  $n$  was increased to 1.5. In the expansion wedge, the thickness of the thermal boundary layer increased by increasing  $n$ , followed by a decrease in the slope of the thermal boundary layer; therefore, the  $Nu$  was reduced until the separation point by 14.5% when  $n$  was increased to 1.5.



## بررسی جریان لایه‌ی مرزی حرارتی روی یک گوشه با دمای سطح متغییر

سید مرتضی مقیمی<sup>۱\*</sup> 

۱- استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد قائم‌شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، قائم‌شهر، ایران.

### چکیده

### اطلاعات مقاله

در این تحقیق، توزیع دما در لایه‌ی مرزی حرارتی روی گوشه بررسی شده است. معادلات لایه‌ی مرزی پیوستگی، ممنوم و انرژی براساس مدل فالکنر-اسکن با شرایط دمای دیواره‌ی متغییر برای جریان آرام، پایدار و تراکم ناپذیر به دست آمده و با استفاده از حل تشابهی به معادلات دیفرانسیل ساده ممنوم و انرژی با اعمال دمای متغییر دیواره‌ی (ضریب  $\Pi$ ) به فرم جدیدی ارائه می‌شود. برای حل معادلات حاصل، با توجه به شرط مرزی بی‌نهایت، از روش نیمه تحلیلی تلفیقی اصلاح شده استفاده می‌گردد. نتایج به دست آمده از این روش با روش عددی برای یک شرایط خاص در عدد پرانتل یک مقایسه و حداکثر خطا  $0.020\%$  درصد حاصل شد. با افزایش  $\Pi$  از  $0.5$  تا  $1.5$  و عدد پرانتل از  $0.7$  تا  $1.0$  برای جریان با زوایای مختلف، ضخامت لایه مرزی حرارتی سریع‌تر رشد می‌نماید. با توجه به اینکه عدد ناسلت رابطه‌ی مستقیم با شیب ضخامت لایه‌ی مرزی حرارتی دارد، با افزایش شیب گوشه و  $\Pi$ ، عدد ناسلت نیز افزایش می‌یابد به گونه‌ای که در پرانتل یک و شیب  $90$  درجه با افزایش  $\Pi$  تا  $1.5$ ، عدد ناسلت  $36/5\%$  افزایش می‌یابد. در گوشه باز شونده (زاویه منفی) با افزایش عدد پرانتل برای یک  $\Pi$  ثابت رفتار جریان مانند قبل بوده و عدد ناسلت افزایش می‌یابد اما با افزایش  $\Pi$ ، ضخامت لایه‌ی مرزی حرارتی نیز افزایش می‌یابد که در نتیجه شیب لایه مرزی دما کاهش خواهد یافت بنابراین عدد ناسلت نیز کاهش می‌یابد. به طوری که عدد ناسلت در نقطه جدایش با افزایش  $\Pi$  تا  $1.5$  به میزان  $14/5\%$  کاهش می‌یابد.

### نوع مقاله: مقاله پژوهشی

دریافت مقاله: ۱۴۰۱/۱۰/۱۲

بازنگری مقاله: ۱۴۰۱/۰۳/۱۴

پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۴/۰۸

### کلید واژگان:

لایه‌ی مرزی حرارتی

دمای متغییر

روش تلفیقی اصلاح شده

روش عددی

فالکنر-اسکن

\*نویسنده مسئول: سید مرتضی مقیمی

پست الکترونیکی:

[salimbahrami@semnan.ac.ir](mailto:salimbahrami@semnan.ac.ir)

## مقدمه

بررسی جریان لایه‌ی مرزی روی سطوح شیب دار (جریان با گرادیان فشار) از مسائل مهم در مکانیک سیالات است که در صنعت تولید نوار چسب، لوله و قطعات پلیمری با استفاده از روش اکستروژن کاربرد فراوانی دارد [۱]. اولین بار توسط فالکنر-اسکن [۲] در سال ۱۹۳۱ جریان بر روی یک گوشه مورد بررسی قرار گرفت. تی اچ لین و کی ال لین [۳] به بررسی لایه‌ی مرزی بر روی سطح شیب دار دما ثابت با استفاده از حل تشابهی با عدد پرنتل کوچک پرداختند که نتایج با مقایسه با پاسخ‌های صحیح از دقت بالایی برخوردار بود. نگانو و همکاران [۴] به روش تجربی مشاهده نمودند که با افزایش زاویه سطح شیب‌دار (افزایش گرادیان فشار معکوس) ضخامت زیر لایه‌ی لزج در جریان آشفته کاهش یافت. اولاه و همکاران [۵] با ارائه‌ی روش جدید OHAM معادله فالکنر-اسکن به همراه انتقال حرارت را حل نموده و نتایج قابل قبولی با مقایسه با روش‌های عددی المان محدود و شو‌تینگ<sup>۱</sup> بدست آوردند. یائو [۶] و همچنین یاکوب<sup>۲</sup> و همکاران [۷] در رابطه با مدل فالکنر-اسکن برای یک نانو سیال دریگ سطح ثابت و همچنین سطح در حال حرکت با تعیین شار حرارتی در سطح، تحقیقاتی انجام دادند.

با توجه به این که در صنعت از سیال غیر نیوتنی مانند پلیمرهای مذاب و رنگ‌ها استفاده زیادی می‌شود بانو و همکاران [۱] با بررسی عددی اثر ویسکوالاستیک<sup>۳</sup> سیال غیر نیوتنی در معادله فالکنر-اسکن، مشاهده نمودند که با افزایش اختلاف تنش نرمال اول روی دیواره، ضخامت مومنوم و ضخامت لایه مرزی حرارتی افزایش یافته و همچنین در یک شیب ثابت (گرادیان فشار ثابت) با افزایش اختلاف تنش نرمال اول، ناسلت متوسط در طول صفحه کاهش یافت. بررسی سیال غیر نیوتنی مدل ماکسول با حل تحلیلی معادله‌ی فالکنر-اسکن با انتقال حرارت در حضور میدان مغناطیسی با تغییرات عدد دیوراه<sup>۴</sup>، عدد هارتمن<sup>۵</sup> و عدد پرنتل<sup>۶</sup> توسط کواسیم و نورین<sup>۷</sup> [۸] صورت پذیرفت. راجا و سندیب<sup>۸</sup> [۹] با مطالعه‌ی اثر ترموفیزیک و حرکت براوانی جریان سیال رادیواکتیو کاسن بر روی گوشه با استفاده از مدل فالکنر-اسکن و بلازیوس دریافتند که نرخ انتقال حرارت در مدل فالکنر-اسکن در مقایسه با مدل بلازیوس بیشتر بوده است. عالم و همکاران [۱۰]<sup>۹</sup> با بررسی عددی لایه‌ی مرزی مغناطیسی با انتقال حرارت نانوسیال بر روی گوشه متخلخل نشان دادند که با افزایش عدد پرنتل، پارامتر تخلخل، پارامتر ناپایداری، پارامتر گرادیان فشار و پارامتر مغناطیسی مقدار سرعت نیز افزایش یافت. حل معادلات غیرخطی پاره‌ای حاکم بر جریان لایه‌ی مرزی روی گوه بسیار زمان‌بر و پیچیده می‌باشد که فالکنر-اسکن با استفاده از حل تشابهی و فرضیات لایه‌ی مرزی، معادلات حاکم را به معادلات غیرخطی ساده درجه سوم تبدیل نمودند، برای حل این معادلات می‌توان مانند محققان زیادی که برای آنالیز طیف وسیعی از مسائل مهندسی از روش نیمه تحلیلی تلفیقی و روش عددی، که روش‌هایی مناسب برای حل معادلات غیرخطی می‌باشند استفاده نمود [۱۱-۱۵].

---

<sup>1</sup> Shooting Method

<sup>2</sup> Yacob

<sup>3</sup> Viscoelastic

<sup>4</sup> Deborah Number

<sup>5</sup> Hartmann Number

<sup>6</sup> Prandtl Number

<sup>7</sup> Qasim & Noreen

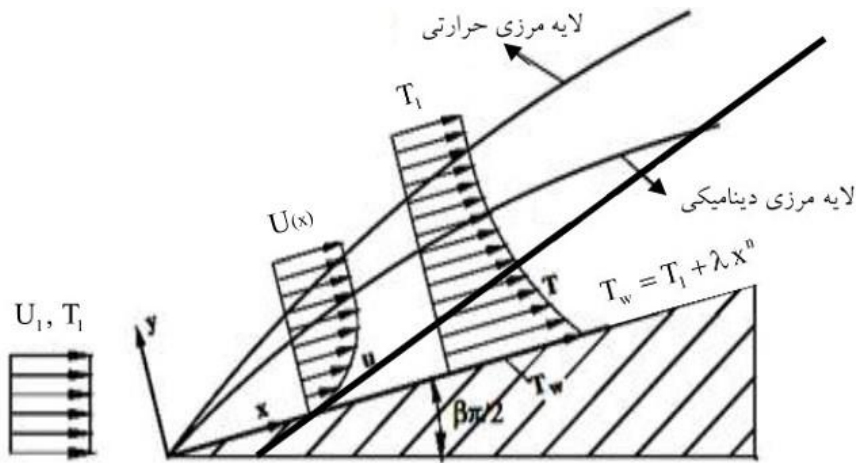
<sup>8</sup> Raju & Sandeep

<sup>9</sup> Alam

در این پژوهش ابتدا معادلات حاکم پاره‌ای غیرخطی با استفاده از حل تشابهی به صورت معادلات ساده‌ی غیرخطی روی سطح شیب‌دار با شرایط دمایی سطح متغییر به دست می‌آید. این شکل از رابطه برای معادله‌ی انرژی برحسب توان دمایی متغییر دیواره تاکنون در هیچ یک از منابع منتشر شده ارائه نشده است. همچنین به دلیل وجود شرط مرزی بی‌نهایت برای حل معادلات اشاره شده، از روش نیمه تحلیلی تلفیقی با استفاده از یک تغییر متغییر نوآورانه استفاده شده است که این روش تاکنون در مطالعات گذشته به کارگرفته نشده است. در نتیجه در این پژوهش به بررسی اثر تغییرات دمایی سطح بر توزیع دمایی سیال و انتقال حرارت با استفاده از روش نیمه تحلیلی تلفیقی اصلاح شده پرداخته می‌شود.

### بیان مسأله

در شکل (۱) سیال ویسکوز و تراکم‌ناپذیر را که روی یک لبه جریان دارد، نشان می‌دهد که در آن  $x$  جهت جریان روی گوشه و  $y$  جهت عمود بر آن است. دمایی دیوار متغییر و برابر  $T_w = T_1 + \lambda x^n$  که در آن  $\lambda$  ضریب ثابت و  $n$  توان متغییر دما بوده و از دمایی جریان آزاد  $T_1$  بیشتر است. به علاوه سرعت بالادست یکنواخت فرض شده و با  $U_1$  نشان داده می‌شود. همچنین، اتلاف ویسکوز ناچیز بوده و قابل صرف‌نظر کردن می‌باشد.



شکل ۱. شماتیکی از هندسه مسأله.

### معادلات حاکم

معادلات لایه مرزی پیوستگی، ممنتوم و انرژی با فرض اینکه سیال نیوتنی، تراکم‌ناپذیر، دوبعدی برای جریان آرام در جهت جریان به ترتیب خواهد شد [۱۶]:

$$\frac{\partial u_{(x,y)}}{\partial x} + \frac{\partial v_{(x,y)}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$u_{(x,y)} \frac{\partial u_{(x,y)}}{\partial x} + v_{(x,y)} \frac{\partial v_{(x,y)}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_{(x,y)}}{\partial y^2} \quad (2)$$

$$u_{(x,y)} \frac{\partial T}{\partial x} + v_{(x,y)} \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (۳)$$

که در آن  $u$  و  $v$  به عنوان اجزای سرعت در جهت  $x$  و  $y$  جریان سیال،  $\nu$  به عنوان ویسکوزیته سینماتیک سیال،  $\alpha$  به عنوان ضریب دیفیوژن حرارتی سیال و  $T$  دمای سیال در داخل لایه‌ی مرزی می‌باشد. شرایط مرزی نیز خواهند شد:

$$y = 0 \rightarrow u = v = 0 \text{ and } T = T_w \quad (۴)$$

$$y \rightarrow \infty \rightarrow u = U_{(x)} \text{ and } T = T_1 \quad (۵)$$

$$x = 0 \rightarrow u = U_{(x)} \text{ and } T = T_1 \quad (۶)$$

که  $U_1$  به عنوان سرعت مرجع در لبه‌ی لایه‌ی مرزی که تابعی از  $x$  می‌باشد و  $T_1$  دمای جریان آزاد است.

### حل تشابهی

با استفاده از حل تشابهی معادلات حاکم پاره‌ای لایه‌ی مرزی به معادلات ساده تبدیل می‌شوند بنابراین با انتگرال‌گیری از معادله پیوستگی می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial u_{(x,y)}}{\partial x} + \frac{\partial v_{(x,y)}}{\partial y} = 0 \rightarrow v_{(x,y)} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y u_{(x,y)} dy \quad (۷)$$

با استفاده از فرض بلازیوس [۱۶]، سرعت داخل لایه‌ی مرزی رابطه آن با سرعت خارج از لایه‌ی مرزی به صورت خطی و همچنین تغییرات  $\eta$  برحسب  $y$  تقریب زده می‌شود:

$$u_{(x,y)} = U_{(x)} f'(\eta) \quad (۸)$$

$$\eta = y g(x) \quad (۹)$$

بنابراین  $d\eta = g_{(x)} dy$  خواهد شد که با مشتق گرفتن نسبت به  $x$  و  $y$  می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = y g'_{(x)} \quad (۱۰)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = g_{(x)} \quad (۱۱)$$

حال سرعت  $v_{(x,y)}$  با توجه به رابطه‌ی (۷)، به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{aligned} v_{(x,y)} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^y u_{(x,y)} dy \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \int_0^y U_{(x)} f'(\eta) dy \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U_{(x)} f(\eta)}{g(x)} \right) \\ &= -\frac{f(\eta)}{g(x)} U'_{(x)} - \frac{U_{(x)}}{g(x)} y g'_{(x)} f'(\eta) + U_{(x)} f(\eta) \frac{g'_{(x)}}{g(x)^2} \end{aligned} \quad (12)$$

جریان خارج از لایه‌ی مرزی را به صورت جریان آزاد  $U_{(x)} = k x^m$  که  $\eta = b y x^a$  تعریف می‌شود [۱۶] بنابراین:

$$U'_{(x)} = k m x^{m-1} \quad (13)$$

همچنین با انتخاب  $g_{(x)} = b x^a$  که  $a = \frac{m-1}{2}$  و  $b^2 = \frac{k(m+1)}{2\nu}$  می‌توان نوشت:

$$g'_{(x)} = b a x^{a-1} = b \frac{m-1}{2} x^{\frac{m-3}{2}} \quad (14)$$

با جایگذاری در روابط (۱۰) و (۱۱) می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = b y a x^{a-1} = b y a x^a \frac{1}{x} = \frac{a \eta}{x} = \frac{(m-1)}{2x} \eta \quad (15)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = b x^a = b x^{\frac{m-1}{2}} \quad (16)$$

$$\left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 = b^2 x^{2a} = b^2 x^{(m-1)} \quad (17)$$

بنابراین با قرار دادن روابط بالا در رابطه‌ی (۱۲) و سپس تقسیم بر  $U_{(x)}$  به صورت زیر ساده خواهد شد:

$$\frac{v_{(x,y)}}{U_{(x)}} = -\left[ \left( \frac{m-1}{2} \right) \eta f'(\eta) + \left( \frac{m+1}{2} \right) f(\eta) \right] \frac{1}{b x^{\frac{m+1}{2}}} \quad (18)$$

در معادله‌ی انرژی (۳) با تعریف عدد بی بعد پرانتل  $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$  می‌توان می‌شود:

$$u_{(x,y)} \frac{\partial T}{\partial x} + v_{(x,y)} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (19)$$

با توجه به اینکه دمای دیواره متغیر به صورت  $T_w = T_1 + \lambda x^n$  دمای بی بعد  $\theta$  به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۷]:

$$\theta = \frac{T_w - T}{T_w - T_1} = 1 - \frac{T - T_1}{T_w - T_1} \rightarrow T = T_1 + (1 - \theta)(T_w - T_1) \quad (20)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۲۰) در رابطه‌ی (۱۹) و با تقسیم  $U_{(x)}$  می‌توان نوشت:

$$\frac{u_{(x,y)} \frac{\partial [(1-\theta)(T_w - T_1)]}{\partial x}}{U_{(x)}} + \frac{v_{(x,y)} \frac{\partial [(1-\theta)(T_w - T_1)]}{\partial y}}{U_{(x)}} = \frac{v}{Pr U_{(x)}} \frac{\partial^2 [(1-\theta)(T_w - T_1)]}{\partial y^2} \quad (21)$$

با توجه به روابط (۸)، (۱۸) رابطه‌ی بالا خواهد شد:

$$f'_{(\eta)} \frac{\partial (\lambda x^n - \lambda x^n \theta)}{\partial x} - \left[ \left( \frac{m-1}{2} \right) \eta f'_{(\eta)} + \left( \frac{m+1}{2} \right) f_{(\eta)} \right] \frac{1}{bx^{\frac{m+1}{2}}} \frac{\partial (\lambda x^n - \lambda x^n \theta)}{\partial y} = \frac{v}{Pr U_{(x)}} \frac{\partial^2 (\lambda x^n - \lambda x^n \theta)}{\partial y^2} \quad (22)$$

با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای رابطه‌ی بالا بعد از تقسیم  $\lambda$  به رابطه‌ی زیر تبدیل می‌شود:

$$nf'_{(\eta)} x^{n-1} - nf'_{(\eta)} x^{n-1} \theta - f'_{(\eta)} x^n \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left[ \left( \frac{m-1}{2} \right) \eta f'_{(\eta)} + \left( \frac{m+1}{2} \right) f_{(\eta)} \right] \times \left[ x^n \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] \frac{1}{bx^{\frac{m+1}{2}}} = \frac{v}{Pr U_{(x)}} \left[ -x^n \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (23)$$

با در نظر گرفتن روابط (۱۷-۱۵) رابطه‌ی بالا به صورت زیر ساده می‌شود:

$$nf'_{(\eta)} x^{n-1} (1-\theta) - f'_{(\eta)} x^n \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{(m-1)}{2x} \eta + \left[ \left( \frac{m-1}{2} \right) \eta f'_{(\eta)} + \left( \frac{m+1}{2} \right) f_{(\eta)} \right] \times \frac{x^n \frac{\partial \theta}{\partial \eta} bx^{\frac{m-1}{2}}}{bx^{\frac{m+1}{2}}} = -x^n \frac{v}{Pr U_{(x)}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} b^2 x^{(m-1)} \quad (24)$$

با استفاده از تعاریف  $b$ ،  $U_{(x)}$  و  $\theta' = \frac{\partial \theta}{\partial \eta}$  در رابطه‌ی بالا، بعد از تقسیم  $x^{n-1}$  خواهد شد:

$$nf'_{(\eta)} (1-\theta) - \frac{m-1}{2} \eta f'_{(\eta)} \theta' + \left( \frac{m-1}{2} \right) \eta f'_{(\eta)} \theta' + \left( \frac{m+1}{2} \right) f_{(\eta)} \theta' = -\frac{m+1}{2Pr} \theta'' \quad (25)$$

با تعریف  $\beta = \frac{2m}{m+1}$  که  $\frac{\beta \pi}{2}$  بیانگر زاویه‌ی گوشه است و در صورت صفر شدن  $\beta$  شکل گوشه‌ی تبدیل به

صفحه تخت می‌شود رابطه‌ی بالا را می‌توان نوشت:

$$\theta'' + Pr f_{(\eta)} \theta' + n\beta Pr f'_{(\eta)} (1-\theta) = 0 \quad (26)$$

همچنین معادله‌ی ممنتوم برای یک گوشه به صورت بی بعد برابر است با [۱۶]:

$$f'''(\eta) + f(\eta)f''(\eta) + \beta(1 - f'^2(\eta)) = 0 \quad (27)$$

### شرایط مرزی

با توجه به هندسه مسأله و فرضیاتی که پیشتر بیان شد، شرایط مرزی سرعت بی بعد و دما بی بعد به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\eta = 0 \rightarrow f(\eta) = f'(\eta) = 0, \theta = 0 \quad (28)$$

$$\eta \rightarrow \infty \rightarrow f'(\eta) = 1, \theta = 1 \quad (29)$$

### حل مسأله

برای حل مسأله، از دو روش نیمه تحلیلی تلفیقی و روش عددی رانج-کوتا مرتبه چهارم [۱۸] استفاده شده است. همچنین، با وجود شرط مرزی بی نهایت، با به کارگیری از یک تغییر متغیر، شرط بی نهایت به شرط مرزی با دامنه‌ی محدود تبدیل می‌شود که یک نوآوری در روش حل است.

### روش تلفیقی

روش تلفیقی، یک روش تحلیلی است که در آن اگر تابع جواب شامل  $n$  ضریب نامشخص باشد،  $n$  موقعیت مختلف انتخاب خواهد شد و در این موقعیت‌ها، تابع باقیمانده صفر در نظر گرفته می‌شود. بنابراین  $n$  مجهول و  $n$  معادله‌ی جبری خواهیم داشت، که با حل آنها، ضرایب محاسبه می‌شود. با جایگذاری این ضرایب در معادله‌ی تابع جواب، در حقیقت به جواب مسأله خواهیم رسید.

در روش نیمه تحلیلی تلفیقی، از یک تابع تقریبی که شرایط مرزی را ارضاء می‌کند به عنوان تابع سرعت بی بعد در نظر گرفته می‌شود به گونه‌ای که اگر در رابطه‌ی (۲۷) قرار داده شود نتیجه صفر شود. اما با توجه به شرط مرزی بی

نهایت، با استفاده از تغییر متغیر  $z = \frac{\eta}{L}$  که در آن  $L$  یک مقدار متناهی می‌تواند باشد، شرایط مرزی را می‌توان

متناهی نمود. بنابراین تابع  $\zeta(z) = \frac{f(\eta)}{L}$  جهت تبدیل تعریف شده و رابطه‌ی (۲۷) خواهد شد:

$$\xi'''(z) + L^2 \xi(z)\xi''(z) + \beta L^2(1 - \xi'(z)) = 0 \quad (30)$$

و شرایط مرزی تبدیل خواهد شد به:

$$\eta = 0 \rightarrow z = 0 \Rightarrow \xi(z) = 0, \xi'(z) = 0 \quad (31)$$

$$\eta = L \rightarrow z = 1 \Rightarrow \xi'(z) = 1 \quad (32)$$

که چند جمله‌ای  $\xi(z)$  به صورت زیر فرض می‌شود:

$$\xi(z) = c_{13}z^{13} + c_{12}z^{12} + \dots + c_1z + c_0 \quad (33)$$

که چند جمله ای بالا دارای ۱۴ ثابت  $c$  داشته که شرط مرزی (۳۱) را نیز ارضا می کند حال برای نمونه رابطه ی (۳۳) برای  $\beta$  برابر یک و  $L$  مقداری محدود در رابطه (۳۰) جایگذاری می شود:

$$\xi(z) = -325c_{13}^2z^{24} - 600c_{13}z^{23} - 500c_{11}c_{13}z^{22} + \dots + 50c_0c_2 - 25c_1^2 + 6c_3 = 0 \quad (34)$$

بنابراین باید ۱۴ ثابت  $c$  که مجهول می باشند را با تشکیل دستگاه محاسبه شوند که با استفاده از شرایط مرزی (۳۱) و (۳۲) سه رابطه زیر بدست می آید:

$$\xi(0) = +6 + 50c_3 + 50c_0c_2 - 25c_1^2 = 0 \quad (35)$$

$$\xi'(0) = 24c_4 - 50c_1c_2 + 150c_0c_3 = 0 \quad (36)$$

$$\xi'(1) = 150c_0c_3 - 50c_1c_2 + \dots - 13800c_{12}c_{13} + 600c_5c_9 = 1 \quad (37)$$

برای ۱۱ معادله ی دیگر، با توجه به مقدار در محدوده  $0 < Z < 1$  است فاصله صفر تا یک را به یازده قسمت تقسیم و در رابطه ی (۳۴) قرار داده می شود تا یازده معادله زیر حاصل شود:

$$R\left(\frac{1}{12}\right) = 25 + 4.03 \times 10^{-10} c_4 c_9 + 5.32 \times 10^{-8} c_0 c_{12} + \dots - 4.08 \times 10^{-24} c_{13}^2 = 0 \quad (1-38)$$

$$R\left(\frac{2}{12}\right) = 25 + 8.26 \times 10^{-7} c_4 c_9 + 5.45 \times 10^{-5} c_0 c_{12} + \dots - 6.85 \times 10^{-17} c_{13}^2 = 0 \quad (2-38)$$

$$R\left(\frac{11}{12}\right) = 25 + 115.25 c_4 c_9 + 1382.38 c_0 c_{12} + \dots - 40.26 c_{13}^2 = 0 \quad (11-38)$$

با تشکیل دستگاه معادلات و حل آن، مقادیر  $c$  به دست می آید.

$$\begin{aligned} c_0 = 0, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 3.0813, \quad c_3 = -4.1636, \quad c_4 = -0.0370, \quad c_5 = 8.2137, \\ c_6 = -12.3567, \quad c_7 = 12.4872, \quad c_8 = -20.0215, \quad c_9 = 34.9340, \quad c_{10} = -39.4887, \\ c_{11} = 26.3951, \quad c_{12} = -9.6978, \quad c_{13} = 1.5244. \end{aligned} \quad (39)$$

با جایگذاری ثوابت به دست آمده در رابطه (۳۴) چند جمله‌ای  $\xi(z)$  به دست آمده و با توجه به  $z = \frac{\eta}{L}$  و

$$\xi(z) = \frac{f(\eta)}{L}$$
 تابع  $f(\eta)$  خواهد شد:

$$f(\eta) = 1.248859 \times 10^{-9} \eta^{13} - 1.986114 \times 10^{-7} \eta^{12} + \dots - 0.166547 \eta^3 + 0.616263 \eta^2 \quad (40)$$

به طریق مشابه برای تا توزیع دمایی بعد  $\theta(\eta)$  خواهد شد:

$$\theta(\eta) = -1.451917 \times 10^{-8} \eta^{14} + 5.450838 \times 10^{-7} \eta^{13} + \dots - 0.004519 \eta^3 + 0.812118 \quad (41)$$

### روش عددی

جهت اعتبار سنجی، از روش عددی رانج-کوتا درجه چهارم روابط (۲۶) و (۲۷) را حل و سپس با پاسخ‌های روش تلفیقی مقایسه می‌شود.

در محاسبات عددی یا آنالیز عددی روش‌های رانج-کوتا خانواده‌ای از روش‌های تکرار شدنی صریح و ضمنی هستند. روش‌های رانج-کوتا برای تخمین راه حل‌های معادلات دیفرانسیل معمولی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این روش ورودی‌های زیر وجود دارند:

- یک معادلات دیفرانسیل معمولی که مقدار  $dy/dx$  را به شکل  $x$  و  $y$  تعریف می‌کند.
- مقدار اولیه  $y$  (یعنی  $y(0)$ ).
- بدین ترتیب، معادله زیر وجود دارد:

$$\frac{dx}{dy} = f(x, y), y(0) = y_0 \quad (42)$$

اکنون، باید مقدار تابع ناشناخته  $y$  در نقطه  $x$  را به دست آورد. روش رانج-کوتا مقدار تقریبی  $y$  برای یک  $x$  داده شده را پیدا می‌کند. تنها، معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی اول را می‌توان با استفاده از روش رانج-کوتا مرتبه‌ی چهارم حل کرد. در زیر، فرمول مورد استفاده برای محاسبه مقدار بعدی  $y_{n+1}$  از مقدار پیشین  $y_n$  به دست می‌آید. مقدار  $n$  برابر است. در اینجا،  $h$  طول هر گام و  $x_{n+1} = x_n + h$  است. طول گام کمتر به معنای صحت بیشتر است.

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} &= y_n + k_1/6 + k_2/3 + k_3/3 + k_4/6 + O(h^5) \end{aligned} \quad (43)$$

فرمول بالا مقدار بعدی  $y_{n+1}$  را با استفاده از  $y_n$  کنونی، همراه با میانگین چهار افزایش محاسبه می‌کند. برای حل به روش عددی معادله (۲۷) را به شکل زیر می‌توان نوشت:

$$f'''(\eta) = -f(\eta)f''(\eta) - \beta(1 - f^2(\eta)) \quad (44)$$

حال جهت حل رابطه‌ی بالا، می‌توان از روابط زیر استفاده نمود:

$$f'(\eta) = G(\eta), f(0) = 0 \quad (45)$$

$$G'(\eta) = H(\eta), G(0) = 0 \quad (46)$$

$$H'(\eta) = -f(\eta)G'(\eta) - \beta(1 - G^2(\eta)), H(0) = ? \quad (47)$$

برای حل دستگاه معادلات بالا مقادیر  $f(0)$ ،  $G(0)$  و  $H(0)$  نیاز می‌باشد که با توجه به مجهول بودن  $H(0)$ ، به روش شوتینگ به گونه‌ای که شرایط مرزی را ارضا کند می‌توان به دست آورد، در نتیجه دستگاه معادلات (۴۴-۴۷) را می‌توان به روش رانج-کوتا حل نمود.

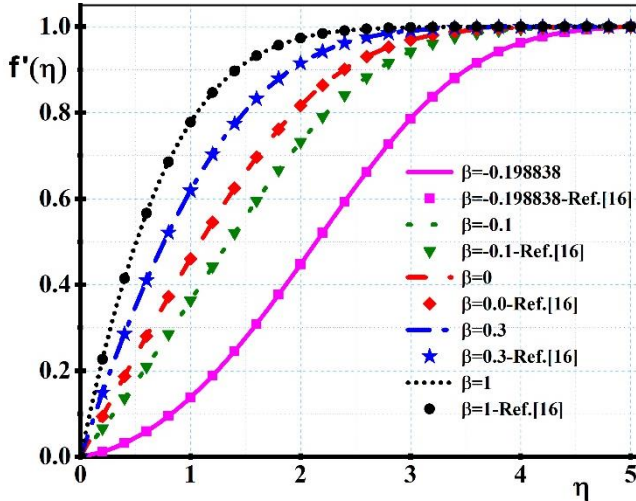
#### اعتبارسنجی

برای درستی و دقت پاسخ‌ها، نتایج حاصل از روش تلفیقی را با نتایج حاصل از روش عددی روش رانج-کوتا مقایسه می‌شود که جدول (۱) و شکل (۲) نتایج حاصل از روش تلفیقی را با نتایج حاصل از روش عددی به ازای  $n$  و  $m$ ،  $Pr$  به ترتیب برابر یک، یک و صفر برای مقایسه آورده شده است که نشان دهنده دقت عالی پاسخ‌ها می‌باشند. همچنین در شکل (۲) نتایج حاصل از روش تلفیقی با مرجع [۱۶] برای سرعت بی‌بعد به ازای  $\beta$  های مختلف را نشان می‌دهد که منحنی‌ها کاملاً همپوشانی دارند.

جدول ۱. مقایسه نتایج توزیع سرعت و دمای بی بعد برای  $n = 0$ ،  $\beta = 1$ ،  $Pr = 1$ .

$\eta$	$f'(\eta)$			$\theta(\eta)$		
	<i>C.M</i>	<i>Num</i>	<i>% Error</i>	<i>C.M</i>	<i>Num</i>	<i>% Error</i>
۰.۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰
۰.۶	۰.۴۱۴۴۵	۰.۴۱۴۵	۰	۰.۳۱۳۴	۰.۳۱۳۴	۰
۱.۰	۰.۶۸۵۹	۰.۶۸۵۹	۰	۰.۵۷۳۹	۰.۵۷۴۰	۰.۰۱۷
۱.۸	۰.۹۳۲۳	۰.۹۳۲۳	۰	۰.۸۸۰۴	۰.۸۸۰۵	۰.۰۱۱
۰.۶	۰.۹۹۰۵	۰.۹۹۰۵	۰	۰.۹۷۸۸	۰.۹۷۸۹	۰.۰۱۰
۳.۰	۰.۹۹۷۰	۰.۹۹۷۰	۰	۰.۹۹۲۵	۰.۹۹۲۷	۰.۰۲۰
۴.۳	۰.۹۹۹۱	۰.۹۹۹۲	۰.۰۱	۰.۹۹۷۶	۰.۹۹۷۸	۰.۰۲۰
۳.۸	۰.۹۹۹۷	۰.۹۹۹۸	۰.۰۱	۰.۹۹۹۲	۰.۹۹۹۴	۰.۰۲۰
۲.۴	۱.۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰	۰	۰.۹۹۹۷	۰.۹۹۹۹	۰.۰۲۰

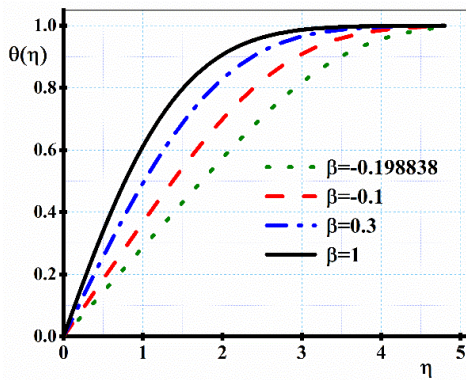
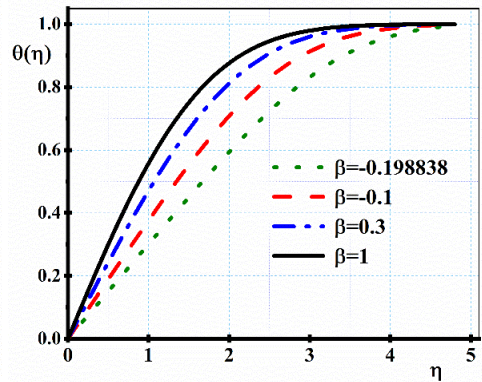
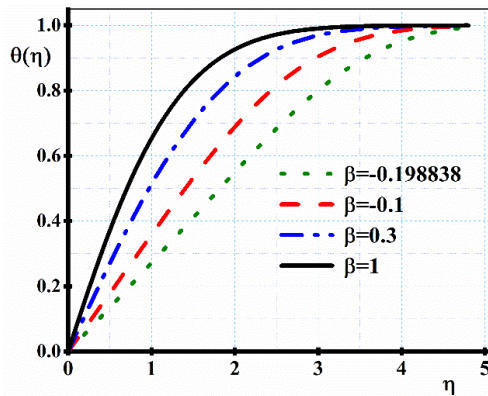
$\eta$	$f'(\eta)$			$\theta(\eta)$		
	<i>.C.M</i>	<i>Num</i>	<i>% Error</i>	<i>.C.M</i>	<i>Num</i>	<i>% Error</i>
۶.۴	۱.۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰	۰	۱.۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰	۰
۴.۸	۱.۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰	۰	۱.۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰	۰
۵.۰	۱.۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰	۰	۱.۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰	۰



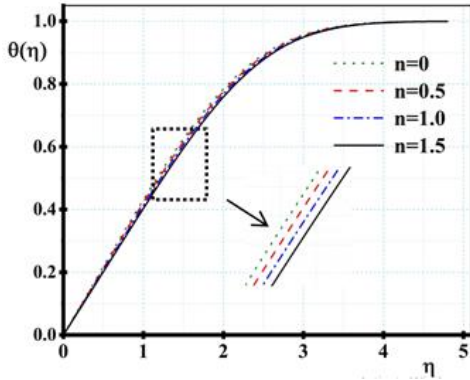
شکل ۲. مقایسه سرعت بی بعد نتایج تحقیق حاضر با مرجع [۱۶].

### بررسی نتایج

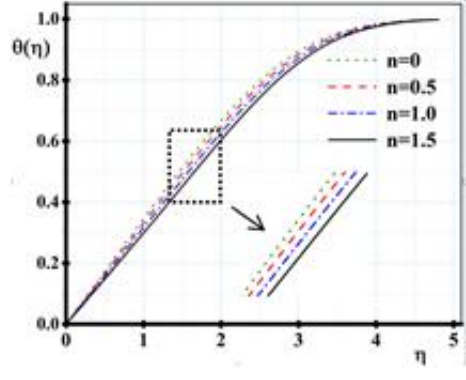
در شکل‌های (۳) اثر زاویه‌ی گوشه  $\beta$  بر دمای بی بعد  $\theta$  برای  $n$  های مختلف را نشان می‌دهند. با افزایش زاویه، دما در راستای عمود بر دیوار، در فاصله‌ی نزدیک‌تر به دمای آزاد می‌رسد که نازک شدن ضخامت لایه‌ی مرزی حرارتی را نشان می‌دهد. بیشترین ضخامت برای  $\beta$  برابر  $-0.198838$  در نقطه‌ی جدایش لایه‌ی مرزی هیدرودینامیکی اتفاق می‌افتد [۱۶]. این روند با افزایش  $n$  توان دمای متغییر دیواره نیز مشاهده می‌شود. با توجه به روابط  $U_{(x)} = k x^m$  و  $\beta = \frac{2m}{m+1}$  با افزایش  $\beta$  همراه با افزایش  $m$  همراه است یعنی سرعت جریان آزاد با شیب بیشتری در راستای  $x$  افزایش می‌یابد. از طرفی افزایش سرعت عامل افزایش انتقال حرارت جابجایی است در نتیجه عدد ناسلت بیشتر می‌شود، همچنین دما در عرض لایه‌ی مرزی با سرعت بیشتری کاهش یافته و از دمای دیواره به دمای جریان آزاد می‌رسد و این به مفهوم کوچک شدن ضخامت لایه مرزی است.

ب:  $n = 1$ الف:  $n = 0.5$ ج:  $n = 1.5$ شکل ۳. اثر زاویه‌ی گوشه  $\beta$  بر دمای بی‌بعد  $\theta$  برای  $n$  های متفاوت.

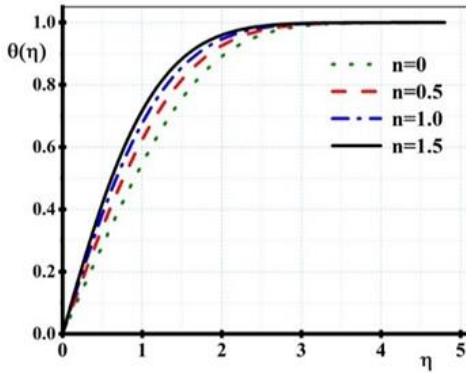
شکل‌های (۴) اثر توان دمای متغییر دیواره  $n$  بر روی دمای بی‌بعد  $\theta$  به ازای  $Pr=1$  برای گوشه با زوایای مختلف با  $\beta$  را نشان می‌دهد. در جریان بر روی گوشه با  $\beta$  مثبت با افزایش  $n$  ضخامت لایه‌ی مرزی حرارتی نازکتر شده و در فاصله‌ی کمتر از دیواره‌ی دما به دمای جریان آزاد می‌رسد و شکل‌های (۴-ج) و (۴-د) بیانگر آن است که هنگامی که دمای دیواره ثابت است، بیشترین ضخامت لایه مرزی حرارتی بوجود می‌آید. اما در شکل‌های (۴-الف) و (۴-ب) برای جریان بر روی گوشه باز شونده ( $\beta$  منفی) با افزایش  $n$  ضخامت لایه‌ی مرزی حرارتی افزایش می‌یابد و کمترین ضخامت لایه‌ی مرزی برای  $n$  برابر صفر، هنگامی که دمای دیواره ثابت است اتفاق می‌افتد.



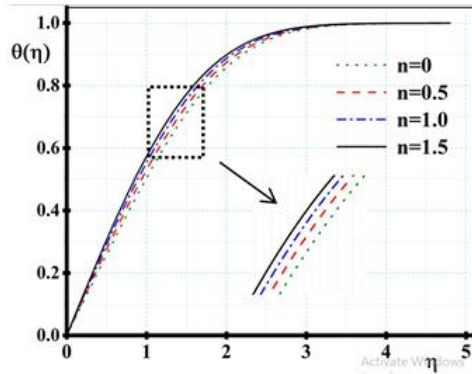
ب:  $\beta = -0.1$



الف:  $\beta = -0.198838$



د:  $\beta = 1$



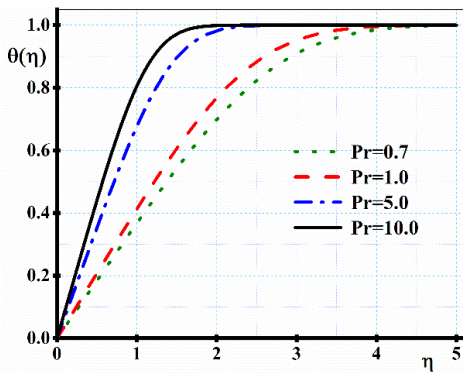
ج:  $\beta = 0.3$

شکل ۴. اثر توان دمایی متغییر دیوار  $n$  بر دمایی بعد  $\theta$  برای  $Pr=1$  و  $\beta$  های متفاوت

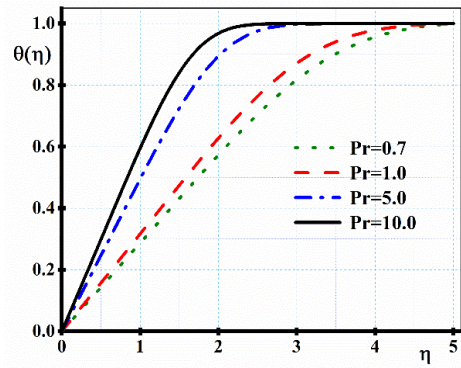
شکل (۵) اثر عدد پرانتل  $Pr$  بر دمایی بعد  $\theta$  به ازای زاویه‌های مختلف گوشه  $\beta$  را نشان می‌دهد. با افزایش پرانتل، رشد لایه‌ی مرزی حرارتی افزایش یافته و ضخامت آن کاهش می‌یابد. این رفتار برای تمام زوایای جریان روی گوشه و گوشه باز شونده قابل مشاهده است.

با توجه به این که مشتق نرمال دمایی بعد با عدد ناسلت نسبت مستقیم دارد [۱۷]، در شکل (۶) برای جریان بر روی گوشه با  $\beta$  مثبت با افزایش  $n$  عدد ناسلت روند صعودی داشته و برای  $n$  یکسان، با افزایش زاویه گوشه  $\beta$  مقدار ناسلت نیز افزایش می‌یابد. اما در جریان بر روی گوشه باز شونده ( $\beta$  منفی) با افزایش  $n$ ، عدد ناسلت روند نزولی داشته و برای  $n$  یکسان، با افزایش قدرمطلق زاویه گوشه بازشونده، عدد ناسلت کمتر خواهد شد. افزایش پارامتر  $n$  به منزله افزایش شیب دما در راستای جریان و در نتیجه، انتقال حرارت افزایش می‌یابد که با افزایش انتقال حرارت، عدد ناسلت که معرف انتقال حرارت بی‌بعد می‌باشد، افزایش می‌یابد. در  $\beta$  مثبت از دید هر دو پارامتر  $n$  و  $m$  در جهت افزایش عدد ناسلت عمل می‌کنند. در  $\beta$  منفی با افزایش پارامتر  $m$  به منزله کاهش سرعت در راستای جریان است که سبب کاهش انتقال حرارت جابجایی می‌شود در نتیجه عدد ناسلت کاهش می‌یابد. همچنین، نتایج به دست آمده نشان می‌دهد

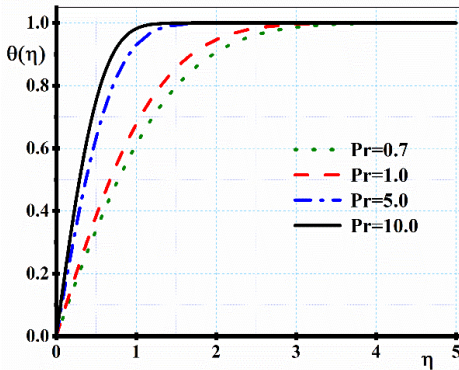
در  $\beta$  منفی عامل کاهش عدد ناسلت ناشی از افزایش  $m$  بر عامل افزایش عدد ناسلت در اثر افزایش  $n$  غلبه دارد و در مجموع عدد ناسلت کاهش می‌یابد.



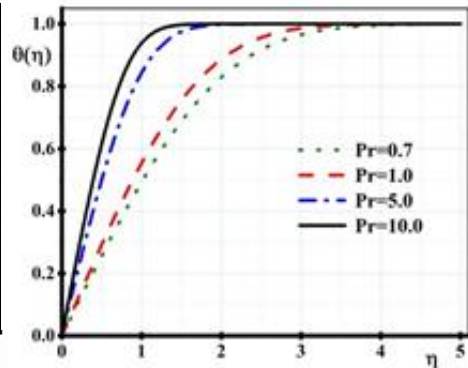
ب:  $\beta = -0.1$



الف:  $\beta = -0.198838$

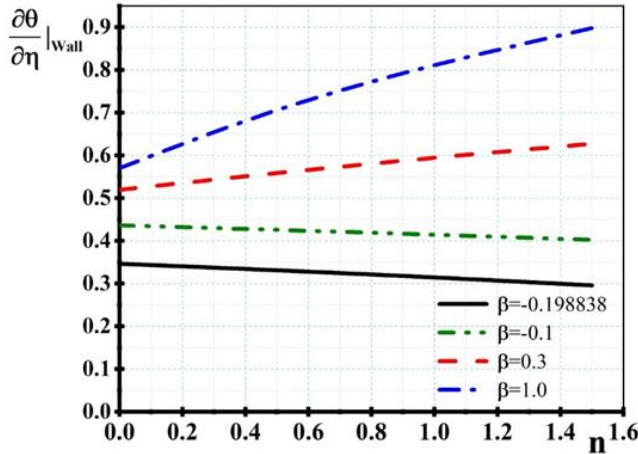


د:  $\beta = 1$



ج:  $\beta = 0.3$

شکل ۵. اثر عدد پرانتل  $Pr$  بر دمای بی‌بعد  $\theta$  برای  $n = 1$  و  $\beta$  های متفاوت.



شکل ۶. اثر توان دمایی متغییر دیواره  $n$  بر مشتق دمایی بی بعد روی دیواره برای  $Pr=1$  و  $\beta$  های متفاوت

### نتیجه گیری

در این تحقیق با به کارگیری روش نیمه تحلیلی تلفیقی اصلاح شده توزیع دمایی بی بعد جریان آرام بر روی گوشه و گوشه بازشونده با حذف ترم اتلاف ویسکوز برای دمایی دیواره متغییر به توان  $n$  با استفاده از حل تشابهی مورد بررسی قرار گرفت که در ادامه نتایج حاصله برای ادامه روند تحقیق ارائه می شود:

- ۱- با افزایش زاویه‌ی گوشه  $\beta$  ضخامت لایه‌ی مرزی حرارتی نازکتر می شود که این روند برای  $n$  توان دمایی متغییر دیواره متفاوت نیز صادق است.
- ۲- در جریان بر روی گوشه با  $\beta$  مثبت با افزایش  $n$  ضخامت لایه مرزی حرارتی نازکتر شده و در فاصله‌ی کمتر از دیواره‌ی دمایی سیال به دمایی جریان آزاد می رسد اما در جریان بر روی گوشه باز شونده ( $\beta$  منفی) با افزایش  $n$  ضخامت لایه‌ی مرزی حرارتی افزایش می یابد.
- ۳- با افزایش عدد پرانتل که با عدد ناسلت رابطه‌ی مستقیم دارد، سرعت رشد لایه‌ی مرزی حرارتی افزایش یافته و ضخامت آن کاهش می یابد. بدین مفهوم که شیب تغییرات دمایی افزایش یافته و در نتیجه عدد ناسلت نیز افزایش می یابد. این رفتار برای تمام زوایای جریان روی گوشه با  $\beta$  مثبت و گوشه باز شونده ( $\beta$  منفی) صادق است.
- ۴- برای جریان با پرانتل برابر یک بر روی گوشه با  $\beta$  مثبت با افزایش  $n$ ، عدد ناسلت روند صعودی داشته است به گونه‌ای که عدد ناسلت در  $\beta$  برابر  $0/3$  به میزان  $17/2\%$  و در  $\beta$  برابر یک به میزان  $36/5\%$  افزایش می یابد، اما در جریان بر روی گوشه باز شونده ( $\beta$  منفی) با افزایش  $n$ ، عدد ناسلت روند نزولی دارد به گونه‌ای که عدد ناسلت در  $\beta$  برابر  $0/1$  به میزان  $7/9\%$  و در نقطه جدایش به میزان  $14/5\%$  کاهش می یابد.

## References

- [1] Norouzi, M., Baou, M., & Jabari Moghadam, A. (2016). *Numerical investigation of hydrodynamic and thermal Falkner–Skan boundary layer of viscoelastic fluids*. Modares Mechanical Engineering, 16(2), 69-78. <http://mme.modares.ac.ir/article-15-9584-en.html>
- [2] Falkneb, V., & Skan, S. (1931). *Solutions of the boundary-layer equations*. Philosophical Magazine Series, 12(80), 865-896. <https://doi.org/10.1080/14786443109461870>
- [3] Lin, H.-T., & Lin, L.-K. (1987). *Similarity solutions for laminar forced convection heat transfer from wedges to fluids of any Prandtl number*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 30(6), 1111-1118. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(87\)90041-X](https://doi.org/10.1016/0017-9310(87)90041-X)
- [4] Nagano, Y., Tagawa, M & ,Tsuji, T. (1993). Effects of Adverse Pressure Gradients on Mean Flows and Turbulence Statistics in a Boundary Layer. In *Turbulent Shear Flows 8*. Springer Berlin Heidelberg. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-77674-8\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-77674-8_2)
- [5] Ullah, H., Islam, S., Idrees, M & ,Arif, M. (2013). *Solution of Boundary Layer Problems with Heat Transfer by Optimal Homotopy Asymptotic Method*. Abstract and Applied Analysis, 2013, 1-11. <https://doi.org/10.1155/2013/324869>
- [6] Yao, B. (2009). *Series solution of the temperature distribution in the Falkner–Skan wedge flow by the homotopy analysis method*. European Journal of Mechanics - B/Fluids, 28(5), 689-693. <https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2009.06.002>
- [7] Yacob, N. A., Ishak, A., Nazar, R., & Pop, I. (2011). *Falkner–Skan problem for a static and moving wedge with prescribed surface heat flux in a nanofluid*. International Communications in Heat and Mass Transfer, 38(2), 149-153. <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2010.12.003>
- [8] Qasim, M., & Noreen, S. (2013). *Falkner-Skan flow of a Maxwell fluid with heat transfer and magnetic field*. International Journal of Engineering Mathematics, 2013, 1-7. <https://doi.org/10.1155/2013/692827>
- [9] Raju, C. S. K., & Sandeep, N. (2016). *A comparative study on heat and mass transfer of the Blasius and Falkner-Skan flow of a bio-convective Casson fluid past a wedge*. The European Physical Journal Plus, 131(11), 1-13. <https://doi.org/10.1140/epjp/i2016-16405-y>
- [10] Alam, M. S., Ali, M., Alim, M. A., Munshi, M. J. H., & Chowdhury, M. Z. U. (2017). *Solution of Falkner- Skan Unsteady MHD Boundary Layer Flow and Heat Transfer Past a Moving Porous Wedge in a Nanofluid*. Procedia Engineering, 194, 414-420. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.08.165>
- [11] Askari, N., & Taheri, M. H. (2020). *Numerical Investigation of a MHD Natural Convection Heat Transfer Flow in a Square Enclosure with Two Heaters on the Bottom Wall*. Karafan Quarterly Scientific Journal, 17(1), 97-114. <https://doi.org/10.48301/kssa.2020.112759>
- [12] Calvert, V., & Razzaghi, M. (2017). *Solutions of the Blasius and MHD Falkner-Skan boundary-layer equations by modified rational Bernoulli functions*. International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, 27(8), 1687-1705. <https://doi.org/10.1108/HFF-05-2016-0190>
- [13] Marinca, V., Ene, R.-D., & Marinca, B. (2014). *Analytic Approximate Solution for Falkner-Skan Equation*. The Scientific World Journal, 2014, 1-22. <https://doi.org/10.1155/2014/617453>
- [14] Masoumnezhad, M., Kazemi, M., Askari, N., Taheri, M. H., & Ghamati, M. (2021). *Semi-Analytical Solution of Unsteady Newtonian Fluid Flow and Heat Transfer between*

- two Oscillation Plate under the Influence of a Magnetic Field*. Karafan Quarterly Scientific Journal, 18(1), 35-62. <https://doi.org/10.48301/kssa.2021.131037>
- [15] Parand, K., & Taghavi, A. (2009). *Rational scaled generalized Laguerre function collocation method for solving the Blasius equation*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 233(4), 980-989. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2009.08.106>
- [16] White, F. M., & Majdalani, J. (2006). *Viscous fluid flow* (2 ed.). McGraw-Hill New York.
- [17] Oosthuizen, P., & Naylor, D. (1999). *An Introduction to Convective Heat Transfer Analysis*. McGraw-Hill. [https://www.researchgate.net/publication/237842389\\_An\\_Introduction\\_to\\_Convective\\_Heat\\_Transfer\\_Analysis](https://www.researchgate.net/publication/237842389_An_Introduction_to_Convective_Heat_Transfer_Analysis)
- [18] Makinde, O. D. (2008). *Effect of arbitrary magnetic Reynolds number on MHD flows in convergent-divergent channels*. International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, 18(6), 697-707. <https://doi.org/10.1108/09615530810885524>