Karafan

Quarterly Scientific Journal of Technical and Vocational University

Autumn 2022, Vol. 19, No. 3, p. 31-51

Journal homepage: https://karafan.tvu.ac.ir/?lang=en

TVU

:10.48301/KSSA.2022.321896.1921

Original Research

E-ISSN: 2538-4430
ISSN: 2382-9796

Investigation of Thermal Boundary Layer over a Wedge with Variable Temperature Surface

Seyed Morteza Moghimi[1*]

[1] Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Qaemshahr Branch, Islamic Azad University, Qaemshahr, Iran.

ARTICLE INFO

Received: 01.02.2022
Revised: 06.04.2022
Accepted: 06.29.2022

Keyword:
Thermal boundary layer
Variable temperature
Modified collocation method
Numerical Method
Falkner-Skan

***Corresponding Author:**
Seyed Morteza Moghimi
Email:
moghimi4999@yahoo.com

ABSTRACT

In the present research, the temperature distribution in the thermal boundary layer on a wedge was investigated. Boundary layer PDE equations of continuity, momentum and energy based on Falkner-Scan model with variable wall temperature conditions for laminar, stable and incompressible flow were obtained and using a similar solution to simple differential equations of momentum and energy by applying variable wall temperature (n coefficient) was presented in a new form. To solve the resulting equations, according to the infinite boundary condition, the modified integrated semi-analytical method was used. The results obtained from this method were compared with the numerical method for a specific condition in the Prandtl number (Pr) and the maximum error was 0.020%. With the increase of n from 0.5 to 1.5 and the Prandtl number (Pr) from 0.7 to 10 for the flow with different angles, the thickness of the thermal boundary layer grew faster; thus, the Nusselt number (Nu) which has a direct relationship with the thermal boundary layer thickness gradient also increased. Where Pr=1 and slope equaled 90 degrees, Nu increased by 36.5% with an increase of n to 1.5. In the expansion corner (negative angle), the flow behavior on the wedge was the same by increasing Pr. However, by increasing the power of the variable wall temperature, the thickness of the thermal boundary layer increased and the slope of the thermal boundary layer decreased, consequently reducing Nu such that the Nu in the separation point decreased by 14.5 % by increasing n to 1.5.

EXTENDED ABSTRACT

Introduction

Investigating the boundary layer flow over a wedge (flow with pressure gradient) is one of the important issues in fluid mechanics and used in the production of adhesive tapes, pipes and polymer part of equipment by using the extrusion method. First, non-linear partial differential equations of flow over a wedge with a variable temperature surface were transformed into ordinary equations using a similarity solution, not previously presented in the literature. Moreover, due to an infinite boundary condition, the semi-analytical collocation method was used with a variable change, which was also innovative.

Methodology

Figure (1) shows a viscose and incompressible fluid flow over a wedge where the x-axis is in addition to the flow and the y-axis is normal to the flow. The surface temperature is variable and equals $T_w = T_1 + \lambda x^n$ where λ is a constant coefficient and n is the variable temperature index. The surface temperature (T_w) is considered greater than the free stream temperature (T_1).

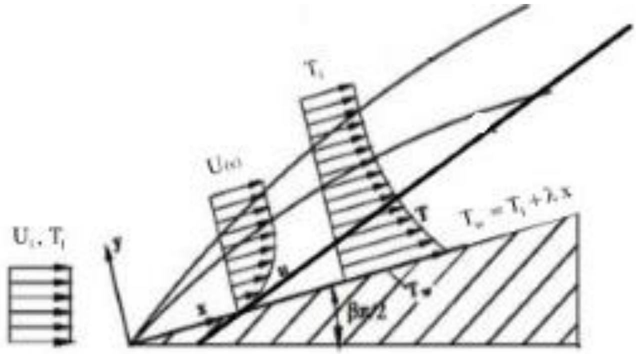


Figure 1. Schematic of problem.

Boundary layer equations of continuity, momentum and energy assume that Newtonian, incompressible, two-dimensional and for laminar fluid flow will be in order:

$$\frac{\partial u_{(x,y)}}{\partial x} + \frac{\partial v_{(x,y)}}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$u_{(x,y)} \frac{\partial u_{(x,y)}}{\partial x} + v_{(x,y)} \frac{\partial v_{(x,y)}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \upsilon \frac{\partial^2 u_{(x,y)}}{\partial y^2} \tag{2}$$

$$u_{(x,y)} \frac{\partial T}{\partial x} + v_{(x,y)} \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{3}$$

Simple nonlinear equations were taken from above equations by using similarity solution as follows:

$$f'''(\eta) + f(\eta)f''(\eta) + \beta(1 - f'^2(\eta)) = 0 \quad (4)$$

$$\theta'' + Pr\, f_{(\eta)}\, \theta' + n\beta\, Pr\, f'_{(\eta)}\, (1 - \theta) = 0 \quad (5)$$

The momentum and energy equations respectability, and boundary condition are as follows:

$$\eta = 0 \rightarrow f(\eta) = f'(\eta) = 0, \theta = 0 \quad (6)$$

$$\eta \rightarrow \infty \rightarrow f'(\eta) = 1, \theta = 1 \quad (7)$$

Both the semi-analytical collocation method and numerical 4th-order Runge-Kutta were used to solve the problem. Furthermore, due to the existence of an infinite boundary layer, this infinite boundary condition was transformed into a finite one via an innovative variable change.

Results and discussion

Figure (2) shows the effect of n on the dimensionless temperature distribution θ, in which the thermal boundary layer becomes thinner with the increase of n. Therefore, it reaches the free flow temperature at a smaller distance on the surface. The maximum thermal boundary layer thickness was generated when the wall temperature was constant (n=0).

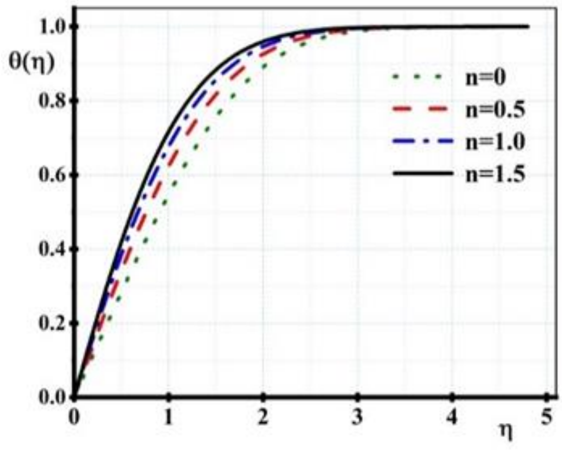


Figure 2. Effect n on the nondimensional distribution temperature where Pr=1 and $\beta = 1$.

As per Figure (3), for flow on the wedge with positive β, the Nusselt number increased with the increase of n, and for the same n, the Nusselt value also increased by increasing the wedge angle. In flow on the expansion wedge ($\beta < 0$), when n increases, the Nusselt number was reduced, and for the same n, the Nusselt number decreased by increasing β.

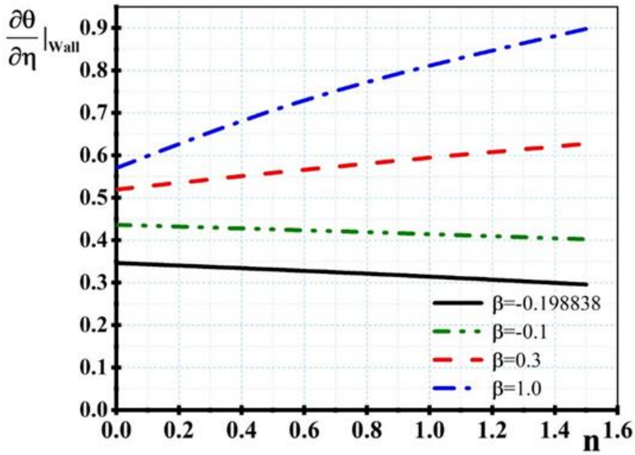


Figure 3. Effect n on the Nusselt number where Pr=1 and $\beta = 1$.

Conclusion

By increasing n from 0.5 to 1.5 and Pr from 0.7 to 10, the thermal boundary layer developed faster; thus, the Nusselt number (Nu), which had a direct relationship with the thermal boundary layer thickness gradient, was also increased. For Pr=1 and angle equal to 900, Nusselt increased by 36.5% when n was increased to 1.5. In the expansion wedge, the thickness of the thermal boundary layer increased by increasing n, followed by a decrease in the slope of the thermal boundary layer; therefore, the Nusselt was reduced until the separation point by 14.5% when n was increased to 1.5.

کارافن

فصلنامه علمی دانشگاه فنی و حرفه‌ای

پاییز ۱٤۰۱، دوره ۱۹، شماره ۳، ۵۱-۳۱

آدرس نشریه: https://karafan.tvu.ac.ir/

10.48301/KSSA.2022.321896.1921

شاپای الکترونیکی: ۲۵۳۸-۴۴۳۰

شاپای چاپی: ۲۳۸۲-۹۷۹۶

مقاله پژوهشی

بررسی جریان لایه‌ی مرزی حرارتی روی یک گوشه با دمای سطح متغیر

سید مرتضی مقیمی[۱*]

۱- استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد قائم‌شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، قائم‌شهر، ایران.

اطلاعات مقاله

دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۱۰/۱۲

بازنگری مقاله: ۱۴۰۱/۰۳/۱۴

پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۴/۰۸

کلید واژگان:

لایه‌ی مرزی حرارتی

دمای متغیر

روش تلفیقی اصلاح شده

روش عددی

فالکنر-اسکن

***نویسنده مسئول:** سید مرتضی مقیمی

پست الکترونیکی:

salimbahrami@semnan.ac.ir

چکیده

در این تحقیق، توزیع دما در لایه‌ی مرزی حرارتی روی گوشه بررسی شده است. معادلات لایه‌ی مرزی پیوستگی، ممنتوم و انرژی براساس مدل فالکنر- اسکن با شرایط دمای دیواره‌ی متغیر برای جریان آرام، پایدار و تراکم ناپذیر به دست آمده و با استفاده از حل تشابهی به معادلات دیفرانسیل ساده ممنتوم و انرژی با اعمال دمای متغیر دیواره‌ی (ضریب n) به فرم جدیدی ارائه می‌شود. برای حل معادلات حاصل، با توجه به شرط مرزی بی‌نهایت، از روش نیمه تحلیلی تلفیقی اصلاح شده استفاده می‌گردد. نتایج به دست آمده از این روش با روش عددی برای یک شرایط خاص در عدد پرانتل یک مقایسه و حداکثر خطا ۰/۰۲۰ درصد حاصل شد. با افزایش n از ۰/۵ تا ۱/۵ و عدد پرانتل از ۰/۷ تا ۱۰ برای جریان با زوایای مختلف، ضخامت لایه مرزی حرارتی سریع‌تر رشد می‌نماید. با توجه به اینکه عدد ناسلت رابطه‌ی مستقیم با شیب ضخامت لایه‌ی مرزی حرارتی دارد، با افزایش شیب گوشه و n، عدد ناسلت نیز افزایش می‌یابد به گونه‌ای که در پرانتل یک و شیب ۹۰ درجه با افزایش n تا ۱/۵، عدد ناسلت ۳۶/۵٪ افزایش می‌یابد. در گوشه باز شونده (زاویه منفی) با افزایش عدد پرانتل برای یک n ثابت رفتار جریان مانند قبل بوده و عدد ناسلت افزایش می‌یابد اما با افزایش n، ضخامت لایه‌ی مرزی حرارتی نیز افزایش می‌یابد که در نتیجه شیب لایه مرزی دما کاهش خواهد یافت بنابراین عدد ناسلت نیز کاهش می‌یابد. به طوری که عدد ناسلت در نقطه جدایش با افزایش n تا ۱/۵ به میزان ۱۴/۵٪ کاهش می‌یابد.

مقدمه

بررسی جریان لایه‌ی مرزی روی سطوح شیب دار (جریان با گرادیان فشار) از مسائل مهم در مکانیک سیالات است که در صنعت تولید نوار چسب، لوله و قطعات پلیمری با استفاده از روش اکستروژن کاربرد فراوانی دارد [۱]. اولین بار توسط فالکنر-اسکن [۲] در سال ۱۹۳۱ جریان بر روی یک گوشه مورد بررسی قرار گرفت. تی اچ لین و کی ال لین [۳] به بررسی لایه‌ی مرزی بر روی سطح شیب دار دما ثابت با استفاده از حل تشابهی با عدد پرانتل کوچک پرداختند که نتایج با مقایسه با پاسخ‌های صحیح از دقت بالایی برخوردار بود. نگانو و همکاران [۴] به روش تجربی مشاهده نمودند که با افزایش زاویه سطح شیبدار (افزایش گرادیان فشار معکوس) ضخامت زیر لایه‌ی لزج در جریان آشفته کاهش یافت. اولاه و همکاران [۵] با ارائه‌ی روش جدید OHAM معادله فالکنر-اسکن به همراه انتقال حرارت را حل نموده و نتایج قابل قبولی با مقایسه با روش‌های عددی المان محدود و شوتینگ[۱] بدست آوردند. یائو [۶] و همچنین یاکوب[۲] و همکاران [۷] در رابطه با مدل فالکنر-اسکن برای یک نانو سیال دریک سطح ثابت و همچنین سطح در حال حرکت با تعیین شار حرارتی در سطح، تحقیقاتی انجام دادند.

با توجه به این‌که در صنعت از سیال غیرنیوتنی مانند پلیمرهای مذاب و رنگ‌ها استفاده زیادی می‌شود بائو و همکاران [۱] با بررسی عددی اثر ویسکوالاستیک[۳] سیال غیرنیوتنی در معادله فالکنر-اسکن، مشاهده نمودند که با افزایش اختلاف تنش نرمال اول روی دیواره، ضخامت مومنتوم و ضخامت لایه مرزی حرارتی افزایش یافته و همچنین در یک شیب ثابت (گرادیان فشار ثابت) با افزایش اختلاف تنش نرمال اول، ناسلت متوسط در طول صفحه کاهش یافت. بررسی سیال غیرنیوتنی مدل ماکسول با حل تحلیلی معادله‌ی فالکنر-اسکن با انتقال حرارت در حضور میدان مغناطیسی با تغییرات عدد دبوراه[۴]، عدد هارتمن[۵] و عدد پرانتل[۶] توسط کواسیم و نوریین[۷] [۸] صورت پذیرفت. راجا و سندیب[۸] [۹] با مطالعه‌ی اثر ترموفیزیک و حرکت براوانی جریان سیال رادیواکتیو کاسن بر روی گوشه با استفاده از مدل فالکنر-اسکن و بلازیوس دریافتند که نرخ انتقال حرارت در مدل فالکنر-اسکن در مقایسه با مدل بلازیوس بیشتر بوده است. عالم و همکاران [۱۰][۹] با بررسی عددی لایه‌ی مرزی مغناطیسی با انتقال حرارت نانوسیال بر روی گوشه متخلخل نشان دادند که با افزایش عدد پرانتل، پارامتر تخلخل، پارامتر ناپایداری، پارامتر گرادیان فشار و پارامتر مغناطیسی مقدار سرعت نیز افزایش یافت.

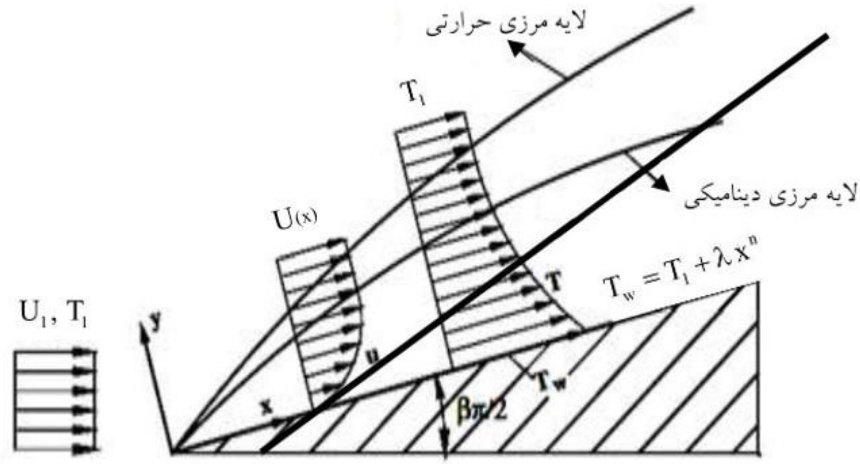
حل معادلات غیرخطی پاره‌ای حاکم بر جریان لایه‌ی مرزی روی گوه بسیار زمان‌بر و پیچیده می‌باشد که فالکنر_اسکن با استفاده از حل تشابهی و فرضیات لایه‌ی مرزی، معادلات حاکم را به معادلات غیرخطی ساده درجه سوم تبدیل نمودند، برای حل این معادلات می‌توان مانند محققان زیادی که برای آنالیز طیف وسیعی از مسائل مهندسی از روش نیمه تحلیلی تلفیقی و روش عددی، که روش‌هایی مناسب برای حل معادلات غیرخطی می‌باشند استفاده نمود [۱۵-۱۱].

[1] Shooting Method
[2] Yacob
[3] Viscoelastic
[4] Deborah Number
[5] Hartmann Number
[6] Prandtl Number
[7] Qasim & Noreen
[8] Raju & Sandeep
[9] Alam

در این پژوهش ابتدا معادلات حاکم پاره‌ای غیرخطی با استفاده از حل تشابهی به صورت معادلات ساده‌ی غیرخطی روی سطح شیبدار با شرایط دمای سطح متغییر به دست می‌آید. این شکل از رابطه برای معادله‌ی انرژی برحسب توان دمای متغییر دیواره تاکنون در هیچ یک از منابع منتشر شده ارائه نشده است. همچنین به‌دلیل وجود شرط مرزی بی‌نهایت برای حل معادلات اشاره شده، از روش نیمه تحلیلی تلفیقی با استفاده از یک تغییر متغییر نوآورانه استفاده شده است که این روش تاکنون در مطالعات گذشته به‌کارگرفته نشده است. در نتیجه در این پژوهش به بررسی اثر تغییرات دمای سطح بر توزیع دمای سیال و انتقال حرارت با استفاده روش نیمه تحلیلی تلفیقی اصلاح شده پرداخته می‌شود.

بیان مسأله

در شکل (۱) سیال ویسکوز و تراکم ناپذیر را که روی یک لبه جریان دارد، نشان می‌دهد که در آن x جهت جریان روی گوشه و y جهت عمود بر آن است. دمای دیوار متغییر و برابر $T_w = T_1 + \lambda x^n$ که در آن λ ضریب ثابت و n توان متغییر دما بوده و از دمای جریان آزاد T_1 بیشتر است. به‌علاوه سرعت بالادست یکنواخت فرض شده و با U_1 نشان داده می‌شود. همچنین، اتلاف ویسکوز ناچیز بوده و قابل صرف‌نظر کردن می‌باشد.



شکل ۱. شماتیکی از هندسه مسأله

معادلات حاکم

معادلات لایه مرزی پیوستگی، ممنتوم و انرژی با فرض اینکه سیال نیوتنی، تراکم‌ناپذیر، دوبعدی برای جریان آرام در جهت جریان به ترتیب خواهد شد [۱۶]:

$$\frac{\partial u_{(x,y)}}{\partial x} + \frac{\partial v_{(x,y)}}{\partial y} = 0 \quad (۱)$$

$$u_{(x,y)}\frac{\partial u_{(x,y)}}{\partial x}+v_{(x,y)}\frac{\partial v_{(x,y)}}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial^2 u_{(x,y)}}{\partial y^2} \quad (۲)$$

$$u_{(x,y)}\frac{\partial T}{\partial x}+v_{(x,y)}\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (۳)$$

که در آن u و v به عنوان اجزای سرعت در جهت x و y جریان سیال، υ به عنوان ویسکوزیته سینماتیک سیال، α به عنوان ضریب دیفیوژن حرارتی سیال و T دمای سیال در داخل لایه‌ی مرزی می‌باشند. شرایط مرزی نیز خواهند شد:

$$y=0 \ \rightarrow u=v=0 \ \ and \ \ T=T_w \quad (۴)$$

$$y\rightarrow\infty \ \rightarrow u=U_{(x)} \ \ and \ \ T=T_1 \quad (۵)$$

$$x=0 \ \rightarrow u=U_{(x)} \ \ and \ \ T=T_1 \quad (۶)$$

که U_1 به عنوان سرعت مرجع در لبه‌ی لایه‌ی مرزی که تابعی از x می‌باشد و T_1 دمای جریان آزاد است.

حل تشابهی

با استفاده از حل تشابهی معادلات حاکم پاره‌ای لایه‌ی مرزی به معادلات ساده تبدیل می‌شوند بنابراین با انتگرال‌گیری از معادله پیوستگی می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial u_{(x,y)}}{\partial x}+\frac{\partial v_{(x,y)}}{\partial y}=0\longrightarrow v_{(x,y)}=-\frac{\partial}{\partial x}\int_0^y u_{(x,y)}\,dy \quad (۷)$$

با استفاده از فرض بلازیوس [۱۶]، سرعت داخل لایه‌ی مرزی رابطه آن با سرعت خارج از لایه‌ی مرزی به صورت خطی و همچنین تغییرات η برحسب y تقریب زده می‌شود:

$$u_{(x,y)}=U_{(x)}f'_{(\eta)} \quad (۸)$$

$$\eta=yg_{(x)} \quad (۹)$$

بنابراین $d\eta=g_{(x)}dy$ خواهد شد که با مشتق گرفتن نسبت به x و y می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=yg'_{(x)} \quad (۱۰)$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial y}=g_{(x)} \tag{۱۱}$$

حال سرعت $v_{(x,y)}$ با توجه به رابطه‌ی (۷)، به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{aligned} v_{(x,y)} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^y u_{(x,y)}dy\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^y U_{(x)}f'_{(\eta)}dy\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U_{(x)}f_{(\eta)}}{g_{(x)}}\right) \\ &= -\frac{f_{(\eta)}}{g_{(x)}}U'_{(x)} - \frac{U_{(x)}}{g_{(x)}}y g'_{(x)}f'_{(\eta)} + U_{(x)}f_{(\eta)}\frac{g'_{(x)}}{g^2_{(x)}} \end{aligned} \tag{۱۲}$$

جریان خارج از لایه‌ی مرزی را به‌صورت جریان آزاد $U_{(x)}=k\,x^m$ که $\eta=byx^a$ تعریف می‌شود [۱۶] بنابراین:

$$U'_{(x)}=kmx^{m-1} \tag{۱۳}$$

همچنین با انتخاب $g_{(x)}=b\,x^a$ که $a=\frac{m-1}{2}$ و $b^2=\frac{k(m+1)}{2\upsilon}$ می‌توان نوشت:

$$g'_{(x)}=bax^{a-1}=b\frac{m-1}{2}x^{\frac{m-3}{2}} \tag{۱۴}$$

با جایگذاری در روابط (۱۰) و (۱۱) می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=byax^{a-1}=byax^a\frac{1}{x}=\frac{a\eta}{x}=\frac{(m-1)}{2x}\eta \tag{۱۵}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial y}=bx^a=bx^{\frac{m-1}{2}} \tag{۱۶}$$

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2=b^2x^{2a}=b^2x^{(m-1)} \tag{۱۷}$$

بنابراین با قرار دادن روابط بالا در رابطه‌ی (۱۲) و سپس تقسیم بر $U_{(x)}$ به صورت زیر ساده خواهد شد:

$$\frac{v_{(x,y)}}{U_{(x)}}=-\left[\left(\frac{m-1}{2}\right)\eta f'_{(\eta)}+\left(\frac{m+1}{2}\right)f_{(\eta)}\right]\frac{1}{bx^{\frac{m+1}{2}}} \tag{۱۸}$$

در معادله‌ی انرژی (۳) با تعریف عدد بی‌بعد پرانتل $Pr=\frac{\nu}{\alpha}$ می‌توان می‌شود:

$$u_{(x,y)}\frac{\partial T}{\partial x}+v_{(x,y)}\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\nu}{Pr\frac{\partial^2T}{\partial y^2}} \tag{۱۹}$$

با توجه به اینکه دمای دیواره متغییر به صورت $T_w = T_1 + \lambda x^n$، دمای بی بعد θ به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۷]:

$$\theta = \frac{T_w - T}{T_w - T_1} = 1 - \frac{T - T_1}{T_w - T_1} \rightarrow T = T_1 + (1-\theta)(T_w - T_1) \tag{۲۰}$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۲۰) در رابطه‌ی (۱۹) و با تقسیم $U_{(x)}$ می‌توان نوشت:

$$\frac{u_{(x,y)}}{U_{(x)}} \frac{\partial[(1-\theta)(T_w - T_1)]}{\partial x} + \frac{v_{(x,y)}}{U_{(x)}} \frac{\partial[(1-\theta)(T_w - T_1)]}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr\, U_{(x)}} \frac{\partial^2[(1-\theta)(T_w - T_1)]}{\partial y^2} \tag{۲۱}$$

با توجه به روابط (۸)، (۱۸) رابطه‌ی بالا خواهد شد:

$$f'_{(\eta)} \frac{\partial(\lambda x^n - \lambda x^n \theta)}{\partial x} - [(\frac{m-1}{2})\eta f'_{(\eta)} + (\frac{m+1}{2}) f_{(\eta)}] \frac{1}{bx^{\frac{m+1}{2}}} \frac{\partial(\lambda x^n - \lambda x^n \theta)}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr\, U_{(x)}} \frac{\partial^2(\lambda x^n - \lambda x^n \theta)}{\partial y^2} \tag{۲۲}$$

با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای رابطه‌ی بالا بعد از تقسیم λ به رابطه‌ی زیر تبدیل می‌شود:

$$n f'_{(\eta)} x^{n-1} - n f'_{(\eta)} x^{n-1} \theta - f'_{(\eta)} x^n \frac{\partial\theta}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} + [(\frac{m-1}{2})\eta f'_{(\eta)} + (\frac{m+1}{2}) f_{(\eta)}] \times [x^n \frac{\partial\theta}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}] \frac{1}{bx^{\frac{m+1}{2}}} = \frac{\nu}{Pr\, U_{(x)}} [- x^n \frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2} (\frac{\partial\eta}{\partial y})^2] \tag{۲۳}$$

با در نظر گرفتن روابط (۱۵-۱۷) رابطه‌ی بالا به صورت زیر ساده می‌شود:

$$n f'_{(\eta)} x^{n-1}(1-\theta) - f'_{(\eta)} x^n \frac{\partial\theta}{\partial\eta}\frac{(m-1)}{2x}\eta + [(\frac{m-1}{2})\eta f'_{(\eta)} + (\frac{m+1}{2}) f_{(\eta)}] \times \frac{x^n \frac{\partial\theta}{\partial\eta} bx^{\frac{m-1}{2}}}{bx^{\frac{m+1}{2}}} = - x^n \frac{\nu}{Pr\, U_{(x)}} \frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2} b^2 x^{(m-1)} \tag{۲۴}$$

با استفاده از تعاریف b، $U_{(x)}$ و $\theta' = \frac{\partial\theta}{\partial\eta}$ در رابطه‌ی بالا، بعد از تقسیم x^{n-1} خواهد شد:

$$n f'_{(\eta)}(1-\theta) - \frac{m-1}{2}\eta f'_{(\eta)}\theta' + (\frac{m-1}{2})\eta f'_{(\eta)}\theta' + (\frac{m+1}{2}) f_{(\eta)}\theta' = -\frac{m+1}{2Pr''} \tag{۲۵}$$

با تعریف $\beta = \frac{2m}{m+1}$ که $\frac{\beta\pi}{2}$ بیانگر زاویه‌ی گوشه است و در صورت صفر شدن β شکل گوشه‌ی تبدیل به صفحه تخت می‌شود رابطه‌ی بالا را می‌توان نوشت:

$$\theta'' + Pr\, f_{(\eta)}\, \theta' + n\beta\, Pr\, f'_{(\eta)}\, (1-\theta) = 0 \qquad (۲۶)$$

همچنین معادله‌ی ممنتوم برای یک گوشه به‌صورت بی‌بعد برابر است با [۱۶]:

$$f'''(\eta) + f(\eta)f''(\eta) + \beta(1 - f'^2(\eta)) = 0 \qquad (۲۷)$$

شرایط مرزی

با توجه به هندسه مسأله و فرضیاتی که پیشتر بیان شد، شرایط مرزی سرعت بی‌بعد و دما بی‌بعد به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\eta = 0 \to f(\eta) = f'(\eta) = 0, \theta = 0 \qquad (۲۸)$$

$$\eta \to \infty \to f'(\eta) = 1, \theta = 1 \qquad (۲۹)$$

حل مسأله

برای حل مسأله، از دو روش نیمه تحلیلی تلفیقی و روش عددی رانچ-کوتا مرتبه چهارم [۱۸] استفاده شده است. همچنین، با وجود شرط مرزی بی‌نهایت، با به‌کارگیری از یک تغییر متغییر، شرط بی‌نهایت به شرط مرزی با دامنه‌ی محدود تبدیل می‌شود که یک نوآوری در روش حل است.

روش تلفیقی

روش تلفیقی، یک روش تحلیلی است که در آن اگر تابع جواب شامل n ضریب نامشخص باشد، n موقعیت مختلف انتخاب خواهد شد و در این موقعیت‌ها، تابع باقیمانده صفر در نظر گرفته می‌شود. بنابراین n مجهول و n معادله‌ی جبری خواهیم داشت، که با حل آنها، ضرایب محاسبه می‌شود. با جایگذاری این ضرایب در معادله‌ی تابع جواب، در حقیقت به جواب مسأله خواهیم رسید.

در روش نیمه تحلیلی تلفیقی، از یک تابع تقریبی که شرایط مرزی را ارضاء می‌کند به‌عنوان تابع سرعت بی‌بعد در نظر گرفته می‌شود به گونه‌ای که اگر در رابطه‌ی (۲۷) قرار داده شود نتیجه صفر شود. اما با توجه به شرط مرزی بی نهایت، با استفاده از تغییر متغییر $z = \frac{\eta}{L}$ که در آن L یک مقدار متناهی می‌تواند باشد، شرایط مرزی را می‌توان متناهی نمود. بنابراین تابع $\zeta(z) = \frac{f(\eta)}{L}$ جهت تبدیل تعریف شده و رابطه‌ی (۲۷) خواهد شد:

$$\xi'''(z) + L^2\xi(z)\xi''(z) + \beta L^2(1 - \xi'(z)) = 0 \qquad (۳۰)$$

و شرایط مرزی تبدیل خواهد شد به:

$$\eta = 0 \to z = 0 \Rightarrow \xi(z) = 0, \xi'(z) = 0 \tag{۳۱}$$

$$\eta = L \to z = 1 \Rightarrow \xi'(z) = 1 \tag{۳۲}$$

که چند جمله‌ای $\xi(z)$ به صورت زیر فرض می‌شود:

$$\xi(z) = c_{13}z^{\wedge 13} + c_{12}z^{12} + \ldots + c_1 z + c_0 \tag{۳۳}$$

که چند جمله ای بالا دارای ۱۴ ثابت c داشته که شرط مرزی (۳۱) را نیز ارضا می‌کند حال برای نمونه رابطه‌ی (۳۳) برای β برابر یک و L مقداری محدود در رابطه (۳۰) جایگذاری می‌شود:

$$\xi(z) = -325c_{13}^2 z^{24} - 600c_{13}z^{23} - 500c_{11}c_{13}z^{22} + \ldots + 50c_0c_2 - 25c_1^2 + 6c_3 = 0 \tag{۳۴}$$

بنابراین باید ۱۴ ثابت c که مجهول می‌باشند را با تشکیل دستگاه محاسبه شوند که با استفاده از شرایط مرزی (۳۱) و (۳۲) سه رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\xi(0) = +6 + 50c_3 + 50c_0c_2 \text{-} 25c_1^2 = 0 \tag{۳۵}$$

$$\xi'(0) = 24c_4 - 50c_1c_2 + 150c_0c_3 = 0 \tag{۳۶}$$

$$\xi'(1) = 150c_0c_3 \text{-} 50c_1c_2 + \ldots - 13800c_{12}c_{13} + 600c_5c_9 = 1 \tag{۳۷}$$

برای ۱۱ معادله‌ی دیگر، با توجه به مقدار در محدوده $0 < Z < 1$ است فاصله صفر تا یک را به یازده قسمت تقسیم و در رابطه‌ی (۳۴) قرار داده می‌شود تا یازده معادله زیر حاصل شود:

$$R(\frac{1}{12}) = 25 + 4.03\times10^{-10}\, c_4\, c_9 + 5.32\times10^{-8}\, c_0\, c_{12} + \ldots - 4.08\times10^{-24}\, c_{13}^2 = 0 \tag{۱-۳۸}$$

$$R(\frac{2}{12}) = 25 + 8.26\times10^{-7}\, c_4\, c_9 + 5.45\times10^{-5}\, c_0\, c_{12} + \ldots - 6.85\times10^{-17}\, c_{13}^2 = 0 \tag{۲-۳۸}$$

. .

. .

. .

$$R(\frac{11}{12}) = 25 + 115.25c_4\, c_9 + 1382.38\, c_0\, c_{12} + ... - 40.26\, c_{13}^2 = 0 \qquad (۱۱-۳۸)$$

با تشکیل دستگاه معادلات و حل آن، مقادیر c به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} &c_0 = 0,\ c_1 = 0, c_2 = 3.0813, c_3 = -4.1636, c_4 = -0.0370, c_5 = 8.2137, \\ &c_6 = -12.3567, c_7 = 12.4872, c_8 = -20.0215, c_9 = 34.9340, c_{10} = -39.4887, \\ &c_{11} = 26.3951, c_{12} = -9.6978, c_{13} = 1.5244. \end{aligned} \qquad (۳۹)$$

با جایگذاری ثوابت به دســـت آمده در رابطه (۳۴) چند جمله‌ای $\xi(z)$ به دســـت آمده و با توجه به $z = \frac{\eta}{L}$ و $\xi(z) = \frac{f(\eta)}{L}$ تابع $f(\eta)$ خواهد شد:

$$f(\eta) = 1.248859 \times 10^{-9} \eta^{13} - 1.986114 \times 10^{-7} \eta^{12} + ... - 0.166547\eta^3 + 0.616263\eta^2 \qquad (۴۰)$$

به طریق مشابهه برای تا توزیع دمای بی‌بعد $\theta(\eta)$ خواهد شد:

$$\theta(\eta) = -1.451917 \times 10^{-8} \eta^{14} + 5.450838 \times 10^{-7} \eta^{13} + ... - 0.004519\eta^3 + 0.812118 \qquad (۴۱)$$

روش عددی

جهت اعتبار سـنجی، از روش عددی رانج-کوتا درجه چهارم روابط (۲۶) و (۲۷) را حل و سـپس با پاسخ‌های روش تلفیقی مقایسه می‌شود.

در محاسبات عددی یا آنالیز عددی روش‌های رانج کوتا خانواده‌ای از روش‌های تکرار شدنی صریح و ضمنی هستند. روش‌های رانج کوتا برای تخمین راه حل‌های معادلات دیفرانســیل معمولی مورد اســتفاده قرار می‌گیرند. در این روش ورودی‌های زیر وجود دارند:

- یک معادلات دیفرانسیل معمولی که مقدار dy/dx را به شکل x و y تعریف می‌کند.
- مقدار اولیه y (یعنی (۰)y).

بدین ترتیب، معادله زیر وجود دارد:

$$\frac{dx}{dy} = f(x, y), y(0) = y_0 \qquad (۴۲)$$

اکنون، باید مقدار تابع ناشــناخته y در نقطه x را به دســت آورد. روش رانج کوتا مقدار تقریبی y برای یک x داده شــده را پیدا می‌کند. تنها، معادلات دیفرانســیل معمولی مرتبه‌ی اول را می‌توان با اســتفاده از روش رانج کوتا مرتبه‌ی چهارم حل کرد. در زیر، فرمول مورد استفاده برای محاسبه مقدار بعدی y_{n+1} از مقدار پیشین y_n به دست می‌آید. مقدار n برابر است. در اینجا، h طول هر گام و $x_{n+1} = x_0 + h$ است. طول گام کمتر به معنای صحت بیشتر است.

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}) \\ k_3 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + k_3) \\ y_{n+1} &= y_n + k_1/6 + k_2/3 + k_3/3 + k_4/6 + O(h^5) \end{aligned} \quad (۴۳)$$

فرمول بالا مقدار بعدی y_{n+1} را با استفاده از y_n کنونی، همراه با میانگین چهار افزایش محاسبه می‌کند.
برای حل به روش عددی معادله (۲۷) را به شکل زیر می‌توان نوشت:

$$f'''(\eta) = -f(\eta)f''(\eta) - \beta(1 - f'^2(\eta)) \quad (۴۴)$$

حال جهت حل رابطه‌ی بالا، می‌توان از روابط زیر استفاده نمود:

$$f'(\eta) = G(\eta), f(0) = 0 \quad (۴۵)$$

$$G'(\eta) = H(\eta), G(0) = 0 \quad (۴۶)$$

$$H'(\eta) = -f(\eta)G'(\eta) - \beta(1 - G^2(\eta)), H(0) = ? \quad (۴۷)$$

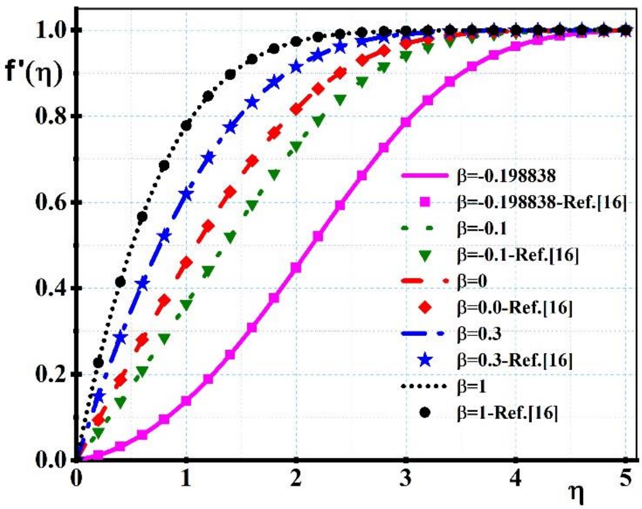
برای حل دستگاه معادلات بالا مقادیر $f(0)$ ، $G(0)$ و $H(0)$ نیاز می‌باشد که با توجه به مجهول بودن $H(0)$، به روش شوتینگ به گونه‌ای که شرایط مرزی را ارضا کند می‌توان به دست آورد، درنتیجه دستگاه معادلات (۴۷-۴۴) را می‌توان به روش رانچ-کوتا حل نمود.

اعتبارسنجی

برای درستی و دقت پاسخ‌ها، نتایج حاصل از روش تلفیقی را با نتایج حاصل از روش عددی روش رانچ-کوتا مقایسه می‌شود که جدول (۱) و شکل (۲) نتایج حاصل از روش تلفیقی را با نتایج حاصل از روش عددی به ازای Pr، m و n به ترتیب برابر یک، یک و صفر برای مقایسه آورده شده است که نشان دهنده دقت عالی پاسخ‌ها می‌باشند.
همچنین در شکل (۲) نتایج حاصل از روش تلفیقی با مرجع [۱۶] برای سرعت بی‌بعد به ازای β های مختلف را نشان می‌دهد که منحنی‌ها کاملا همپوشانی دارند.

جدول ۱. مقایسه نتایج توزیع سرعت و دمای بی بعد برای $Pr=1$ ، $\beta=1$ ، $n=0$

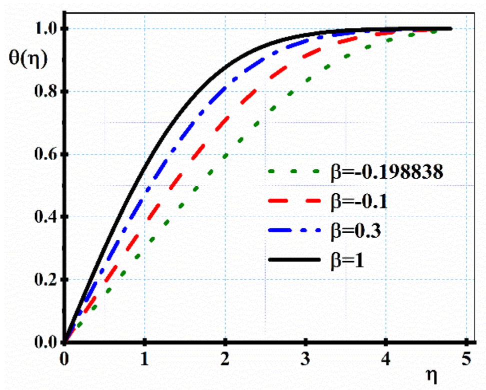
	$f'(\eta)$			$\theta(\eta)$		
η	C.M	Num	٪ Error	C.M	Num	٪ Error
۰.۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۰۰	۰
۶.۰	۰.۴۱۴۴۵	۰.۴۱۴۵	۰	۰.۳۱۳۴	۰.۳۱۳۴	۰
۱.۰	۰.۶۸۵۹	۰.۶۸۵۹	۰	۰.۵۷۳۹	۰.۵۷۴۰	۰.۰۱۷
۱.۸	۰.۹۳۲۳	۰.۹۳۲۳	۰	۰.۸۸۰۴	۰.۸۸۰۵	۰.۰۱۱
۶.۲	۰.۹۹۰۵	۰.۹۹۰۵	۰	۰.۹۷۸۸	۰.۹۷۸۹	۰.۰۱۰
۳.۰	۰.۹۹۷۰	۰.۹۹۷۰	۰	۰.۹۹۲۵	۰.۹۹۲۷	۰.۰۲۰
۴.۳	۰.۹۹۹۱	۰.۹۹۹۲	۰.۰۱	۰.۹۹۷۶	۰.۹۹۷۸	۰.۰۲۰
۳.۸	۰.۹۹۹۷	۰.۹۹۹۸	۰.۰۱	۰.۹۹۹۲	۰.۹۹۹۴	۰.۰۲۰
۲.۴	۱.۰۰۰۰	۱.۰۰۰	۰	۰.۹۹۹۷	۰.۹۹۹۹	۰.۰۲۰
۶.۴	۱.۰۰۰۰	۱.۰۰۰	۰	۱.۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰	۰
۴.۸	۱.۰۰۰۰	۱.۰۰۰	۰	۱.۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰	۰
۵.۰	۱.۰۰۰۰	۱.۰۰۰	۰	۱.۰۰۰۰	۱.۰۰۰۰	۰



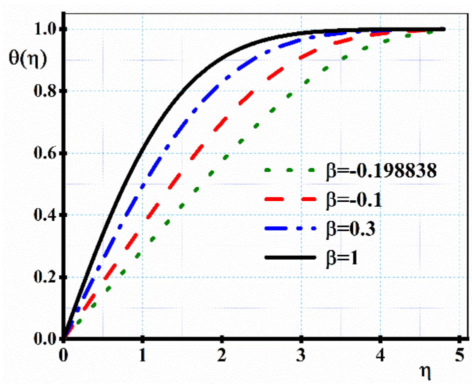
شکل ۲. مقایسه سرعت بی بعد نتایج تحقیق حاضر با مرجع [۱۶]

بررسی نتایج

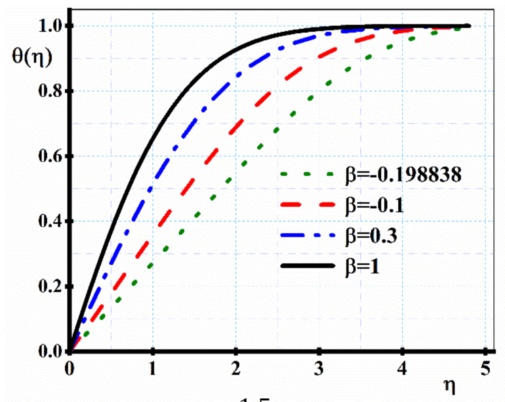
در شکل‌های (۳) اثر زاویه‌ی گوشه β بر دمای بی بعد θ برای n های مختلف را نشان می‌دهند. با افزایش زاویه، دما در راستای عمود بر دیوار، در فاصله‌ی نزدیک‌تر به دمای آزاد می‌رسد که نازک شدن ضخامت لایه‌ی مرزی حرارتی را نشان می‌دهد. بیشترین ضخامت برای β برابر ۰/۱۹۸۸۳۸- در نقطه‌ی جدایش لایه‌ی مرزی هیدرودینامیکی اتفاق می‌افتد [۱۶]. این روند با افزایش n توان دمای متغییر دیواره نیز مشاهده می‌شود. با توجه به روابط $U_{(x)} = k\,x^{m}$ و $\beta = \dfrac{2m}{m+1}$ با افزایش β همراه با افزایش m همراه است یعنی سرعت جریان آزاد با شیب بیشتری در راستای x افزایش می‌یابد. از طرفی افزایش سرعت عامل افزایش انتقال حرارت جابجایی است در نتیجه عدد ناسلت بیشتر می‌شود، همچنین دما در عرض لایه‌ی مرزی با سرعت بیشتری کاهش یافته و از دمای دیواره به دمای جریان آزاد می‌رسد و این به مفهوم کوچک شدن ضخامت لایه مرزی است.



الف: $n = 0.5$



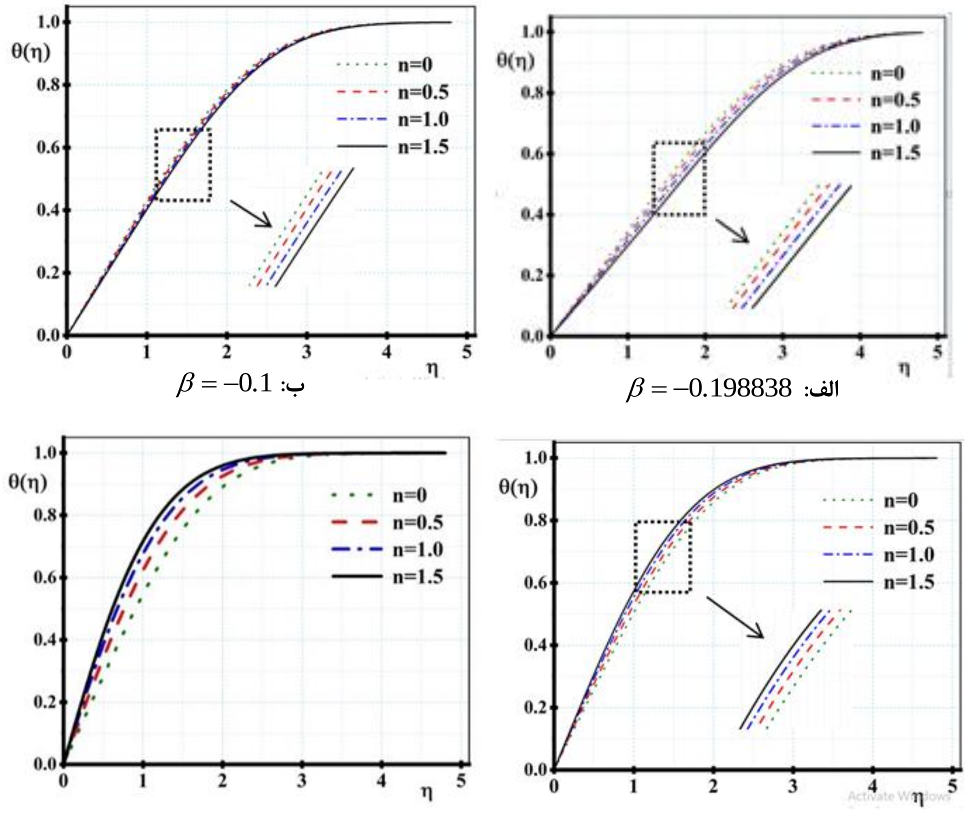
ب: $n = 1$



ج: $n = 1.5$

شکل ۳. اثر زاویه‌ی گوشه β بر دمای بی‌بعد θ برای n های متفاوت

شکل‌های (۴) اثر توان دمای متغییر دیواره n بر روی دمای بی‌بعد θ به ازای $Pr=1$ برای گوشه با زوایای مختلف با β را نشان می‌دهد. در جریان بر روی گوشه با β مثبت با افزایش n ضخامت لایه‌ی مرزی حرارتی نازکتر شده و در فاصله‌ی کمتر از دیواره‌ی دما به دمای جریان آزاد می‌رسد و شکل‌های (۴-ج) و (۴-د) بیانگر آن است که هنگامی که دمای دیواره ثابت است، بیشترین ضخامت لایه مرزی حرارتی بوجود می‌آید. اما در شکل‌های (۴-الف) و (۴-ب) برای جریان بر روی گوشه باز شونده (β منفی) با افزایش n ضخامت لایه‌ی مرزی حرارتی افزایش می‌یابد و کمترین ضخامت لایه‌ی مرزی برای n برابر صفر، هنگامی که دمای دیواره ثابت است اتفاق می‌افتد.



الف: $\beta=-0.198838$ ب: $\beta=-0.1$

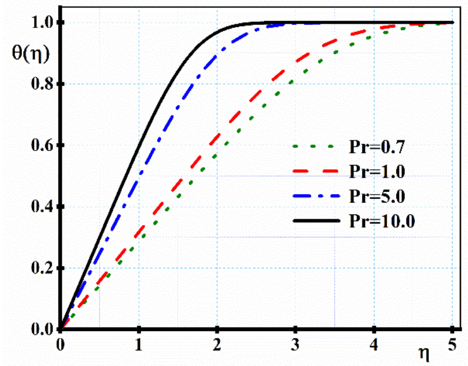
ج: $\beta=0.3$ د: $\beta=1$

شکل ۴. اثر توان دمای متغییر دیوار n بر دمای بی‌بعد θ برای $Pr=1$ و β های متفاوت

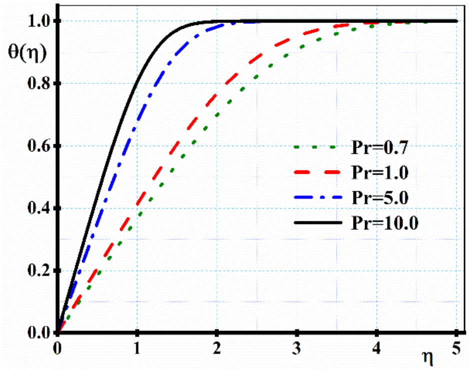
شکل (۵) اثر عدد پرانتل Pr بر دمای بی‌بعد θ به ازای زاویه‌های مختلف گوشه β را نشان می‌دهد. با افزایش پرانتل، رشد لایه‌ی مرزی حرارتی افزایش یافته و ضخامت آن کاهش می‌یابد. این رفتار برای تمام زوایای جریان روی گوشه و گوشه باز شونده قابل مشاهده است.

با توجه به این که مشتق نرمال دمای بی‌بعد با عدد ناسلت نسبت مستقیم دارد [۱۷]، در شکل (۶) برای جریان بر روی گوشه با β مثبت با افزایش n عدد ناسلت روند صعودی داشته و برای n یکسان، با افزایش زاویه گوشه β مقدار

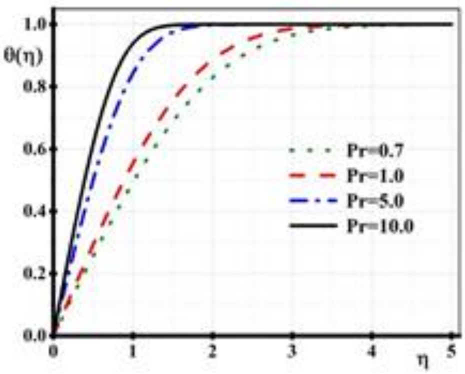
ناسلت نیز افزایش می‌یابد. اما در جریان بر روی گوشه باز شونده (β منفی) با افزایش n، عدد ناسلت روند نزولی داشته و برای n یکسان، با افزایش قدرمطلق زاویه گوشه بازشونده، عدد ناسلت کمتر خواهد شد. افزایش پارامتر n به منزله افزایش شیب دما در راستای جریان و در نتیجه، انتقال حرارت افزایش می‌یابد که با افزایش انتقال حرارت، عدد ناسلت که معرف انتقال حرارت بی‌بعد می‌باشد، افزایش می‌یابد. در β مثبت ازدیاد هر دو پارامتر n و m در جهت افزایش عدد ناسلت عمل می‌کنند. در β منفی با افزایش پارامتر m به منزله کاهش سرعت در راستای جریان است که سبب کاهش انتقال حرارت جابجایی می‌شود در نتیجه عدد ناسلت کاهش می‌یابد. همچنین، نتایج به دست آمده نشان می‌دهد در β منفی عامل کاهش عدد ناسلت ناشی از افزایش m بر عامل افزایش عدد ناسلت در اثر افزایش n غلبه دارد و در مجموع عدد ناسلت کاهش می‌یابد.



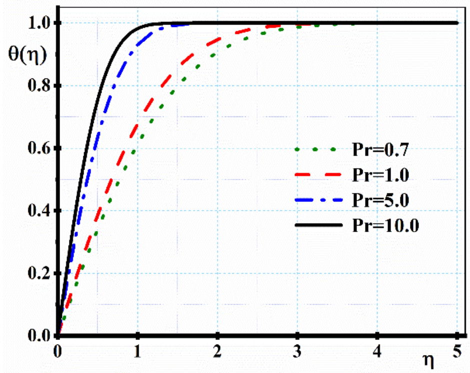
الف: $\beta = -0.198838$



ب: $\beta = -0.1$

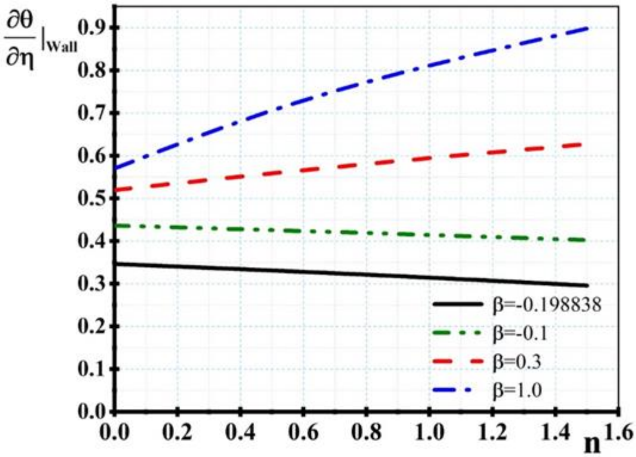


ج: $\beta = 0.3$



د: $\beta = 1$

شکل ۵. اثر عدد پرانتل Pr بر دمای بی‌بعد θ برای $n = 1$ و β های متفاوت



شکل ۶. اثر توان دمای متغییر دیواره n بر مشتق دمای بی بعد روی دیواره برای $Pr=1$ و β های متفاوت

نتیجه‌گیری

در این تحقیق با به‌کارگیری روش نیمه تحلیلی تلفیقی اصلاح شده توزیع دمای بی‌بعد جریان آرام بر روی گوشه و گوشه بازشونده با حذف ترم اتلاف ویسکوز برای دمای دیواره متغییر به توان n با استفاده از حل تشابهی مورد بررسی قرار گرفت که در ادامه نتایج حاصله برای ادامه روند تحقیق ارائه می‌شود:

۱- با افزایش زاویه‌ی گوشه β ضخامت لایه‌ی مرزی حرارتی نازک‌تر می‌شود که این روند برای n توان دمای متغییر دیواره متفاوت نیز صادق است.

۲- در جریان بر روی گوشه با β مثبت با افزایش n ضخامت لایه مرزی حرارتی نازک‌تر شده و در فاصله‌ی کمتر از دیواره‌ی دمای سیال به دمای جریان آزاد می‌رسد اما در جریان بر روی گوشه باز شونده (β منفی) با افزایش n ضخامت لایه‌ی مرزی حرارتی افزایش می‌یابد.

۳- با افزایش عدد پرانتل که با عدد ناسلت رابطه‌ی مستقیم دارد، سرعت رشد لایه‌ی مرزی حرارتی افزایش یافته و ضخامت آن کاهش می‌یابد. بدین مفهوم که شیب تغییرات دما افزایش یافته و در نتیجه عدد ناسلت نیز افزایش می‌یابد. این رفتار برای تمام زوایای جریان روی گوشه با β مثبت و گوشه باز شونده (β منفی) صادق است.

۴- برای جریان با پرانتل برابر یک بر روی گوشه با β مثبت با افزایش n، عدد ناسلت روند صعودی داشته است به گونه‌ای که عدد ناسلت در β برابر ۰/۳ به میزان ۱۷/۲٪ و در β برابر یک به میزان ۳۶/۵٪ افزایش می‌یابد، اما در جریان بر روی گوشه باز شونده (β منفی) با افزایش n، عدد ناسلت روند نزولی دارد به گونه‌ای که عدد ناسلت در β برابر ۰/۱ به میزان ۷/۹٪ و در نقطه جدایش به میزان ۱۴/۵٪ کاهش می‌یابد.

References

[1] Norouzi, M., Baou, M., & Jabari Moghadam, A. (2016). *Numerical investigation of hydrodynamic and thermal Falkner–Skan boundary layer of viscoelastic fluids*. Modares Mechanical Engineering, 16(2), 69-78. http://mme.modares.ac.ir/article-15-9584-en.html

[2] Falkneb, V., & Skan, S. (1931). *Solutions of the boundary-layer equations*. Philosophical Magazine Series, 12(80), 865-896. https://doi.org/10.1080/14786443109461870

[3] Lin, H.-T., & Lin, L.-K. (1987). *Similarity solutions for laminar forced convection heat transfer from wedges to fluids of any Prandtl number*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 30(6), 1111-1118. https://doi.org/10.1016/0017-9310(87)90041-X

[4] Nagano, Y., Tagawa, M & ,.Tsuji, T. (1993). Effects of Adverse Pressure Gradients on Mean Flows and Turbulence Statistics in a Boundary Layer. In *Turbulent Shear Flows 8*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-77674-8_2

[5] Ullah, H., Islam, S., Idrees, M & ,.Arif, M. (2013). *Solution of Boundary Layer Problems with Heat Transfer by Optimal Homotopy Asymptotic Method*. Abstract and Applied Analysis, 2013, 1-11. https://doi.org/10.1155/2013/324869

[6] Yao, B. (2009). *Series solution of the temperature distribution in the Falkner–Skan wedge flow by the homotopy analysis method*. European Journal of Mechanics - B/Fluids, 28(5), 689-693. https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2009.06.002

[7] Yacob, N. A., Ishak, A., Nazar, R., & Pop, I. (2011). *Falkner–Skan problem for a static and moving wedge with prescribed surface heat flux in a nanofluid*. International Communications in Heat and Mass Transfer, 38(2), 149-153. https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2010.12.003

[8] Qasim, M., & Noreen, S. (2013). *Falkner-Skan flow of a Maxwell fluid with heat transfer and magnetic field*. International Journal of Engineering Mathematics, 2013, 1-7. https://doi.org/10.1155/2013/692827

[9] Raju, C. S. K., & Sandeep, N. (2016). *A comparative study on heat and mass transfer of the Blasius and Falkner-Skan flow of a bio-convective Casson fluid past a wedge*. The European Physical Journal Plus, 131(11), 1-13. https://doi.org/10.1140/epjp/i2016-16405-y

[10] Alam, M. S., Ali, M., Alim, M. A., Munshi, M. J. H., & Chowdhury, M .Z. U. (2017). *Solution of Falkner- Skan Unsteady MHD Boundary Layer Flow and Heat Transfer Past a Moving Porous Wedge in a Nanofluid*. Procedia Engineering, 194, 414-420. https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.08.165

[11] Askari, N., & Taheri, M. H. (2020). *Numerical Investigation of a MHD Natural Convection Heat Transfer Flow in a Square Enclosure with Two Heaters on the Bottom Wall*. Karafan Quarterly Scientific Journal, 17(1), 97-114. https://doi.org/10.48301/kssa.2020.112759

[12] Calvert, V., & Razzaghi, M. (2017). *Solutions of the Blasius and MHD Falkner-Skan boundary-layer equations by modified rational Bernoulli functions*. International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, 27(8), 1687-1705. https://doi.org/10.1108/HFF-05-2016-0190

[13] Marinca, V., Ene, R.-D., & Marinca, B. (2014). *Analytic Approximate Solution for Falkner-Skan Equation*. The Scientific World Journal, 2014, 1-22. https://doi.org/10.1155/2014/617453

[14] Masoumnezhad, M., Kazemi, M., Askari, N., Taheri, M. H., & Ghamati, M. (2021). *Semi-Analytical Solution of Unsteady Newtonian Fluid Flow and Heat Transfer between two Oscillation Plate under the Influence of a Magnetic Field*. Karafan Quarterly Scientific Journal, 18(1), 35-62. https://doi.org/10.48301/kssa.2021.131037

[15] Parand, K., & Taghavi, A. (2009). *Rational scaled generalized Laguerre function collocation method for solving the Blasius equation*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 233(4), 980-989. https://doi.org/10.1016/j.cam.2009.08.106

[16] White, F. M., & Majdalani, J. (2006). *Viscous fluid flow* (2 ed.). McGraw-Hill New York.

[17] Oosthuizen, P., & Naylor, D. (1999). *An Introduction to Convective Heat Transfer Analysis*. McGraw-Hill. https://www.researchgate.net/publication/237842389_An_Introduction_to_Convective_Heat_Transfer_Analysis

[18] Makinde, O. D. (2008). *Effect of arbitrary magnetic Reynolds number on MHD flows in convergent-divergent channels*. International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, 18(6), 697-707. https://doi.org/10.1108/09615530810885524