



# The Numerical Investigation of Heat Transfer Rate and Entropy Generation of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/Water Nanofluid Flow in a Closed Cavity Containing 4 Circular Cylinders with Two Different Arrangements Using a Hybrid FD-LBM Technique

Amir Javad Ahrar<sup>1\*</sup>, Mohammad Omidpanah<sup>2</sup>, Seyed Ali Agha Mirjalily<sup>3</sup>

<sup>1,2</sup>Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Technical and Vocational University (TVU), Tehran, Iran.

<sup>3</sup>Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Yazd Branch, Islamic Azad University, Yazd, Iran.

## ARTICLE INFO

### Article Type:

Original Research

Received: 08.31.2021

Revised: 12.19.2021

Accepted: 01.16.2022

### Keyword:

Hybrid FD-LBM Numerical Technique  
Nanofluid

Single-phase Nonhomogeneous Model  
Arrangements for Cylinders  
Instabilities in LBM Solution Method

### \*Corresponding Author:

Amir Javad Ahrar

Email: [ajahrar@tvu.ac.ir](mailto:ajahrar@tvu.ac.ir)

## ABSTRACT

In this study, the flow patterns, heat transfer rate and entropy generation rate of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/Water nanofluid was simulated in a closed cavity containing 4 circular cylinders with 2 different arrangements. The renowned single-phase nonhomogeneous technique (Buongiorno Model) was chosen to assess the nanofluid flow and heat transfer rate numerically. However, the diffusion term in the concentration equation of the technique usually possesses a relatively low value, which might cause instability issues during the iteration process. Hence, in order to deal with this problem, an in-house Fortran 90 code was developed using a novel hybrid FD-LBM method with TVD characteristics. The mentioned algorithm has been proved to be a great asset when facing flows with lower rate of diffusion compared to convection. The active parameters in this study were Ra, Le, and Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> nanoparticle volume fractions, and their influence on the Nu and Sh numbers as well as the entropy generation rate of the system were investigated in the cavity for both cylinder arrangements. According to the results of this simulation, the stream function and consequently the flow velocity in the diamond arrangement were much higher compared to the square arrangement. Moreover, it was observed that not only the addition of nanoparticles could not raise the heat transfer rate from the wall, but in  $\phi = 9\%$ , the Nusselt number experienced an approximate 15% decrement.



---

**EXTENDED ABSTRACT**


---

**Introduction**

In this study, the flow patterns, heat transfer rate, and entropy generation rate of Al2O3/Water nanofluid were simulated in a closed cavity containing 4 circular cylinders with two different arrangements. In order to solve the equations, a hybrid FD-LBM technique with TVD characteristics was applied. According to the presented literature review, the use of this method for curve boundaries was not investigated in detail, and hence the method was applied to the mentioned geometry. This not only confirmed the capabilities of the numerical technique, but also helped find a better vision of the heat transfer rate and entropy generation of the nanofluid flow facing different arrangements of obstacles.

**Methodology**

The renowned single-phase nonhomogeneous technique (Buongiorno Model) was chosen to assess the nanofluid flow and heat transfer rate, numerically. However, the diffusion term in the concentration equation of the technique usually possesses a relatively low value, which may cause instability issues during the iteration process. Hence, to deal with this problem, an in-house Fortran 90 code was developed using a novel hybrid FD-LBM method with TVD characteristics. The mentioned algorithm proved to be a great asset when facing flows with a lower rate of diffusion compared to convection. The equations used to simulate the flow and heat transfer of the nanofluid are as follows:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial(U^2)}{\partial X} + \frac{\partial(UV)}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + Pr \nabla^2 U \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{\partial(V^2)}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + Pr \nabla^2 V + Ra Pr(\theta) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial(U\theta)}{\partial X} + \frac{\partial(V\theta)}{\partial Y} = \nabla^2 \theta + N_B \left( \frac{\partial \Phi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) + N_T \left( \left( \frac{\partial \theta}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)^2 \right) \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial(U\Phi)}{\partial X} + \frac{\partial(V\Phi)}{\partial Y} = \frac{1}{Le} \nabla^2 \Phi + \frac{N_T}{Le N_B} \nabla^2 \theta \quad (5)$$

Here, equations 1-3 are the simple 2D Navier-Stokes equations which provided the velocity components as well as the pressure distribution throughout the geometry. Equation 4 is the energy conservation equation with two additional source terms due to the Brownian motion and thermophoresis from which the temperature distribution can be obtained and the last equation is solved explicitly with a finite-difference technique to calculate the nanoparticles volume fraction in different locations of the geometry. Thereby, for the fluid flow and heat transfer equations, a D2Q9 SRT lattice Boltzmann technique was applied:

$$f_i(x + c_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(x, t) = -\frac{1}{\tau_v} [f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t)] + \Delta t w_i F \quad (6)$$

$$g_i(x + c_i \Delta t, t + \Delta t) - g_i(x, t) = -\frac{1}{\tau_\alpha} [g_i(x, t) - g_i^{eq}(x, t)] + \Delta t w_i S \quad (7)$$

However, due to a much weaker diffusion term in equation 5, if one tries to solve it via an extra distribution function and an SRT-LBM technique, the solution procedure will encounter severe stability problems for high amounts of  $Le$ . Here, instead, this equation was assessed using a TVD-FDM technique and the discretized equation is as follows:

$$\begin{aligned} & \frac{\phi^{new} - \phi^{old}}{\Delta \tau} + \frac{(U\phi)_e - (U\phi)_w}{\Delta X} + \frac{(U\phi)_n - (U\phi)_s}{\Delta Y} = \\ & = \frac{1}{Le} \left( \frac{\phi(i+1, j) - 2\phi(i, j) + \phi(i-1, j)}{\Delta X^2} + \frac{\phi(i, j+1) - 2\phi(i, j) + \phi(i, j-1)}{\Delta Y^2} \right) + \\ & + \frac{N_T}{Le N_B} \left( \frac{\theta(i+1, j) - 2\theta(i, j) + \theta(i-1, j)}{\Delta X^2} + \frac{\theta(i, j+1) - 2\theta(i, j) + \theta(i, j-1)}{\Delta Y^2} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

## Results and discussion

A schematic view of the two arrangements of the circular obstacles (square and diamond) in the cavity is shown in Figure 1. The aspect ratio of the cylinders was assumed to be 0.1 and the heat flux and particle flux were considered zero at the top and bottom surfaces of the cavity. Moreover, in both arrangements, the nondimensional temperature and particle concentration values were assumed to be equal to zero on the east wall and equal to unity on the west wall. The cylinder walls were considered to be adiabatic, solid, and stationary and the fluid was only driven in the cavity due to the gravitational forces. In addition, it is noteworthy that the only slip motions that were taken into account in this study were due to the Brownian motion and thermophoresis.

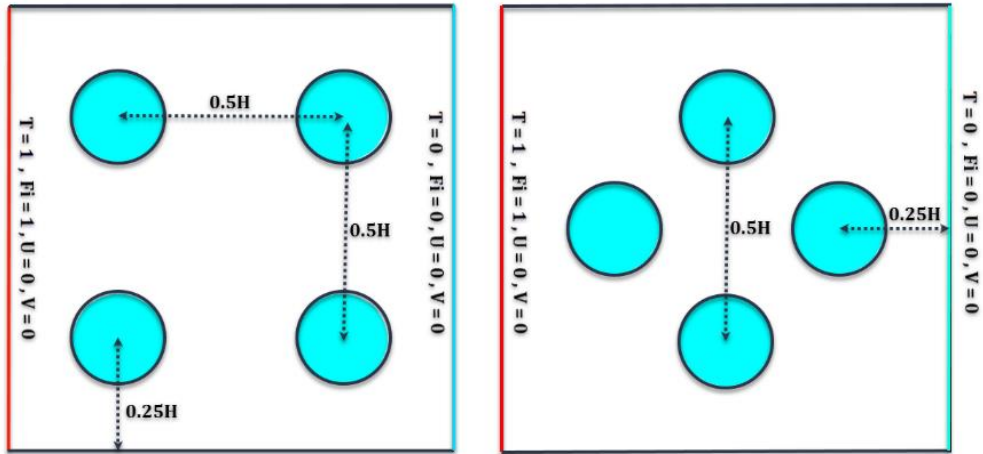


Figure 1. A schematic view of the test case geometry and boundary conditions for the square and diamond arrangements.

In order to have a better insight into the behavior of entropy generation in the system, the overall entropy generation rate of the system along with its components are presented in Table 1 for different  $Ra$ ,  $\phi$ , and  $Le$  numbers in both cylinder arrangements. As can be observed, an increment in  $Ra$  number drastically increased the frictional component leading to a decrement in  $Be$  number. Although this phenomenon was obvious in both arrangements, it can be seen that the effect was more pronounced in the square arrangement. On the other hand, the augmentation of particle volume fraction caused a reduction in the stream function of the flow, and consequently led to an increase in  $Be$  number and frictional irreversibility losing its value regarding the heat component.

Table 1. Irreversibility components for the fluid flow with various  $Ra$ ,  $\phi$ , and  $Le$  numbers for the two cylinder arrangements.

		◆	■	◆	■	◆	■	◆	■	◆	■
		SI sum	SI fr	SI ht	Stream function	bej av					
$Ra$	$10^3$	3.81793	5.09005	0.00106	0.00839	3.8073	5.08176	0.2075	0.1786	0.6472	0.7608
	$10^4$	4.97550	5.91030	0.79359	0.62734	4.1819	5.2829	1.7197	1.5388	0.38289	0.38299
	$10^5$	40.2487	38.8044	32.2591	30.8645	7.9896	7.9399	9.8365	9.4205	0.16353	0.15615
	$10^6$	603.136	643.847	586.999	627.8604	16.137	15.987	27.738	30.538	0.0559	0.0457
$\phi$	0	40.2488	38.8040	32.2591	30.8641	7.9896	7.9398	9.8362	9.4315	0.1635	0.15615
	3	37.3955	35.7893	29.4119	27.8037	7.9835	7.9856	10.006	9.5199	0.1692	0.16379
	6	36.0593	34.2816	28.2340	26.3927	7.8252	7.8889	9.9291	9.4292	0.1702	0.16669
	9	34.4267	32.4951	26.8465	24.7658	7.5801	7.7292	9.6064	9.1565	0.1707	0.16746
$Le$	0.1	40.2487	38.8040	32.2590	30.86415	7.9896	7.9398	9.8370	9.4314	0.1635	0.15615
	1	40.2488	38.8040	32.2597	30.86414	7.9896	7.9398	9.8362	9.4315	0.16353	0.15616
	10	40.2487	38.8044	32.2591	30.86455	7.9896	7.9399	9.8365	9.4205	0.1635	0.15615
	100	40.2485	38.8040	32.2589	30.86415	7.9896	7.9398	9.8365	9.4316	0.1635	0.15615

**Conclusion**

- It was observed that an increment in Ra resulted in a raise of mean Nu and Sh numbers in both arrangements.
- In the diamond arrangement, due to the absence of any strong vortex near the walls, the stream function was usually greater for any Ra number. This led to a higher amount of frictional and heat entropy generation rates.
- Unpredictably, an increment of particle volume fraction caused a higher viscosity leading to a decrease in both Nu and Sh numbers.
- The Lewis number's main influence was on the Sh number and its effect on Nu and the entropy generation rate of the system was almost negligible in all cases.



# بررسی عددی انتقال حرارت و تولید آنتروپی جریان سیال آب/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> در یک حفره بسته با دو چیدمان مختلف $\epsilon$ مانع دایروی به روش هیبرید FD-LBM

امیر جواد احرار<sup>۱\*</sup>، محمد امیدپناه<sup>۲</sup>، سیدعلی آقا میرجلیلی<sup>۳</sup>

۱ و ۲- استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فنی و حرفه‌ای، تهران، ایران.

۳- استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد یزد، دانشگاه آزاد اسلامی، یزد، ایران.

## چکیده

## اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۰۶/۰۹

بازنگری مقاله: ۱۴۰۰/۰۹/۲۸

پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۱۰/۲۶

## کلید واژگان:

روش عددی هیبرید FD-LBM

نانوسیال

مدل تک‌فاز غیرهمگن

چیدمان موانع مختلف

ناپایداری روش حل شبکه بولتزمن

\*نویسنده مسئول: امیر جواد احرار

پست الکترونیکی:

[ajahrar@tvu.ac.ir](mailto:ajahrar@tvu.ac.ir)

در این پژوهش، جریان، انتقال حرارت و تولید آنتروپی نانوسیال آب/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> در یک حفره بسته با حضور ۴ مانع دایروی با دو چیدمان مختلف در هندسه شبیه‌سازی شده است. تکنیک به‌کاررفته برای شبیه‌سازی جریان نانوسیال براساس روش مشهور نانوسیال تک‌فاز غیرهمگن (مدل بونگیورنو) می‌باشد که در این روش اصولاً نرخ نفوذ در معادله غلظت نانوسیال ضعیف می‌باشد و می‌تواند در همگرایی حل تأثیر منفی داشته باشد. از همین رو به‌منظور غلبه بر این نقیصه، نرم‌افزار مورد استفاده در این شبیه‌سازی فرترن ۹۰ انتخاب گردید و کد مورد نظر با استفاده از یک روش جدید FD-LBM با قابلیت TVD نوشته شد که با استفاده از این الگوریتم امکان شبیه‌سازی عددی جریان‌های سیالات با نرخ نفوذ پایین نسبت به نرخ همرفت بالاتر فراهم می‌شود. پارامترهای فعال در این پژوهش عدد ریلی، لویس و درصد حجمی نانوذرات اکسید آلومینیم هستند که تأثیر آنها بر عدد ناسلت، عدد شروود و نرخ آنتروپی تولیدشده در هندسه حل، با دو چیدمان مختلف موانع بررسی می‌گردد. براساس نتایج این مدل‌سازی تابع جریان و به تبع آن سرعت سیال در چیدمان لوزی به‌مراتب بیشتر از چیدمان مربعی می‌باشد. همچنین مشخص شد که با افزایش نانوذرات نه‌تنها نرخ انتقال حرارت از دیواره افزایش نمی‌یابد بلکه در  $\phi = 9\%$  مقدار ناسلت نزدیک به ۱۵ درصد کاهش می‌یابد.



## مقدمه

از دیرباز تا کنون بشر در جستجوی یافتن راه‌حل‌های متنوع و خلاقانه‌ای به منظور حل مشکلات خود بوده است. در این امر مهم، مهندسان همواره در یافتن این راه‌حل‌ها پیشرو بودند. به‌طور کلی به منظور حل یک مسئله مهندسی، سه رویکرد متفاوت ارائه می‌شود: حل آزمایشگاهی، حل عددی و حل تحلیلی [۱-۳]. ساخت نمونه آزمایشگاهی معمولاً با صرف زمان و هزینه بالا همراه است و حل‌های تحلیلی نیز عموماً محدود به شرایط و حالت‌های خاص می‌شوند و کمتر عمومیت می‌یابند. از همین رو در دهه‌های اخیر همراه با رشد منابع محاسباتی با ظرفیت‌های بالاتر، توسعه روش‌های عددی به منظور حل مسائل مهندسی به‌طور فزاینده‌ای در دستور کار محققان قرار گرفته است [۴؛ ۵].

این تکنیک‌های عددی در زمینه مکانیک سیالات و انتقال حرارت به سه دسته تکنیک‌های ماکروسکوپیک، مزوسکوپیک و میکروسکوپیک تقسیم می‌شوند [۶]. در روش‌های ماکرو معادلات بقای محیط پیوسته (ناویر-استوکس<sup>۱</sup>) با استفاده از روش‌های کلاسیک عددی (مانند حجم محدود، اختلاف محدود و ...) حل می‌شوند [۷]. در حالی که در روش‌های مزو معادله تابع توزیع جریان بر روی یک شبکه مجزا با سرعت‌های متفاوت با استفاده از روش شبکه بولتزمن<sup>۲</sup> شبیه‌سازی و حل می‌گردد [۶؛ ۸]. در روش‌های میکروسکوپیک معادله همیلتون<sup>۳</sup> با معادله ناویر استوکس جایگزین می‌شود و با استفاده از روش ذرات<sup>۴</sup> شبیه‌سازی می‌گردد [۹]. استفاده ترکیبی از روش‌های فوق امکان بهره بردن از مزایای هر یک را به صورت جمعی در اختیار پژوهشگران قرار می‌دهد لیکن به واسطه تفاوت در روش گسسته‌سازی و پیشرفت حل مسئله این امر همواره یکی از معضله‌های شیرین در برابر مهندسیین مکانیک بوده است.

لت و همکاران [۱۰] در سال ۲۰۰۵ از یکی از نخستین شبیه‌سازی‌های ترکیبی، جریان پوزیه را با استفاده از تکنیک ترکیبی<sup>۵</sup> FD-LBM شبیه‌سازی و حل کردند. در این مقاله، هندسه دوبعدی موردنظر به سه ناحیه شکسته شد و سپس دو ناحیه با روش عددی اختلاف محدود و یک ناحیه با روش عددی شبکه بولتزمن حل شدند. ایشان بیان کردند که استفاده از روش‌های کلاسیک بر روی مرزها نسبت به روش شبکه بولتزمن دارای مزیت در فهم فیزیکی شرط مرزی می‌باشد. در یک تحقیق دیگر لی و همکاران تکنیک المان محدود را با شبکه بولتزمن ادغام کردند. در این مقاله هدف از ارائه این روش ترکیبی، استفاده از توانایی‌های روش المان محدود در شبیه‌سازی مرزهای منحنی بیان گردید [۱۱]. در همین راستا لی و لیو در سال ۲۰۱۶ تکنیک عددی شبکه بولتزمن را با روش حجم محدود بر یک شبکه بی‌سازمان<sup>۶</sup> اجرا کردند [۱۲]. ایشان هدف از انجام این تحقیق را تعمیم روش شبکه بولتزمن برای هندسه‌های پیچیده‌تر بیان کردند.

علاوه بر امر ترکیب تکنیک‌ها در راستای تسهیل شبیه‌سازی شرایط مرزی منحنی‌ها، از روش‌های هیبرید برای افزایش پایداری حل استفاده می‌گردد. در سال ۲۰۱۴ ضرغامی و احمدی [۱۳] در مقاله‌ای، معادله بولتزمن را از روش حجم محدود حل کردند و نتایج خود را برای هندسه جریان پله ارائه کردند. براساس یافته‌های ایشان در این مقاله،

<sup>1</sup> Navier-Stokes

<sup>2</sup> Lattice Boltzmann Method (LBM)

<sup>3</sup> Hamilton's Equation

<sup>4</sup> Particle Method

<sup>5</sup> Hybrid Method

<sup>6</sup> Unstructured Mesh

پایداری حل افزایش چشمگیری یافت و گردابه‌های ثانویه نیز برای رینولدزهای بالاتر به‌خوبی مشاهده شدند. در تحقیقی دیگر لی و همکاران [۱۴] با بیان این مسئله که افزودن ویسکوزیته مصنوعی نه تنها بر پایداری حل بلکه بر دقت نتایج حاصل نیز اثرگذار خواهد بود، با استفاده از محدودکننده شار رو<sup>۱</sup> معادله بولتزمن را مجدداً با تکنیک حجم محدود، گسسته‌سازی و حل کردند. براساس یافته‌های ایشان این روش، پیشرفت چشمگیری را در امر پایداری و دقت نتایج عددی روش LBM ارائه می‌کرد.

احرار و جوارشکیان [۱۵] در سال ۲۰۱۷ با ارائه یک روش هیبرید FD-LBM با مشخصه TVD<sup>۲</sup> شیوه‌ای جدید با پایداری و سرعت هم‌گرایی بسیار بالا ارائه کردند. در این روش، حل معادله بولتزمن به‌منظور شبیه‌سازی جریان سیال و معادله بقای انرژی از روش اختلاف محدود به کار برده می‌شوند. به‌منظور افزایش پایداری حل از دو تابع محدودکننده شار مین<sup>۳</sup> و سوپرپی<sup>۴</sup> استفاده گردید (توضیحات بیشتر درباره روش‌ها در [۷؛ ۱۶]) و عملکرد الگوریتم حل به‌دست‌آمده برای جریان مشهور حفره بسته بررسی شد. با توجه به نتایج، این روش حل، دقیق‌تر، پایدارتر و سریع‌تر از روش‌های شبکه بولتزمن<sup>۵</sup> SRT و<sup>۶</sup> MRT می‌باشد (توضیحات بیشتر درباره روش‌ها در [۱۷]). در همان سال احرار و جوارشکیان در تحقیقی دیگر [۱۸] عملکرد روش عددی توسعه‌یافته را برای حل معادله اسکالر درصد حجمی نانوذرات به‌کار بردند. با توجه به کوچک بودن ضریب ترم پخش در این معادله، هم‌گرایی از روش‌های معمول LBM با دشواری‌های متعددی همراه است که این روش جدید این نقیصه را برطرف کرد.

براساس پیشینه تحقیق ارائه شده، مشهود است که رفتار این الگوریتم حل هیبرید با خاصیت TVD در مواجهه با مرزهای منحنی و دایروی تاکنون مورد بحث و بررسی نبوده است؛ بنابراین در این مقاله تلاش می‌شود تا عملکرد الگوریتم حل هیبرید FD-LBM توسعه داده شده با محدودکننده شار مناسب [۱۹] در برخورد با مرزهای منحنی بررسی و مطالعه گردد. مضاف بر این مسئله، نرخ انتقال حرارت و تولید آنتروپی در سیستم برای جریان نانوسیال آب/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> بر دو چیدمان متفاوت از چهار مانع دایروی موجود در هندسه، شبیه‌سازی و حل می‌شوند. این چهار مانع می‌توانند نمایانگر چهار خط لوله در یک میدل حرارتی یا صرفاً موانعی برای تغییر رژیم جریان در هندسه تلقی شوند و با استفاده از آن‌ها تفاوت‌های ناشی از تغییر رفتار جریان سیال به‌واسطه نحوه چیدمان موانع بر نرخ انتقال حرارت و تولید بازگشت‌ناپذیری در سیستم بررسی می‌گردد.

## معادلات و روش حل

### معادلات حاکم بر جریان

در این مقاله، از مدل مشهور بونگیورنو [۲۰] به‌منظور شبیه‌سازی جریان و انتقال حرارت نانوسیال آب/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> به شیوه تک‌فاز غیرهمگن استفاده شده است. در این روش، نانوسیال، تک‌فاز فرض می‌شود لیکن معادله درصد

<sup>1</sup> Roe scheme

<sup>2</sup> Total variation diminishing

<sup>3</sup> Min-mod scheme

<sup>4</sup> Superbee scheme

<sup>5</sup> Single relaxation time

<sup>6</sup> Multi relaxation time

حجمی نانوذرات غوطه‌ور در سیال نیز به صورت یک معادله اسکالر مجزا حل می‌گردد. بدین ترتیب مشخصات انتقالی و حرارتی نانوسیال با استفاده از تابع درصد حجمی در هر نقطه از جریان سیال قابل محاسبه و اعمال خواهند بود. با توجه به یافته‌های بونگیورنو در این رژیم جریان، دو مکانیزم حرکت بروانی و ترموفورسیس صورت غالب را در بین هفت مکانیزم حرکت نسبی ذره با سیال پیدا خواهند کرد. از همین رو می‌توان معادلات حاکم بر جریان نانوسیال را به شکل زیر نوشت:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (۱)$$

$$\frac{\partial(\rho_{nf}u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_{nf}u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_{nf}uv)}{\partial y} = -\nabla P + \mu_{nf}\nabla^2 u \quad (۲)$$

$$\frac{\partial(\rho_{nf}v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_{nf}uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_{nf}v^2)}{\partial y} = -\nabla P + \mu_{nf}\nabla^2 v + \rho_{nf}\beta_{nf}g(T - T_c) \quad (۳)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_{nf}c_{nf}T)}{\partial t} + \rho_{nf}c_{nf}\frac{\partial(uT)}{\partial x} + \rho_{nf}c_{nf}\frac{\partial(vT)}{\partial y} \\ = \nabla \cdot (K\nabla T) + \rho_p c_p \left[ D_B \nabla \phi \cdot \nabla T + D_T \frac{\nabla T \cdot \nabla T}{T} \right] \end{aligned} \quad (۴)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(u\phi)}{\partial x} + \frac{\partial(v\phi)}{\partial y} = \nabla \cdot \left[ D_B \nabla \phi + D_T \frac{\nabla T}{T} \right] \quad (۵)$$

معادلات فوق با بُعد هستند و اندیس‌های  $nf$  و  $p$  به ترتیب بیانگر خواص نانوسیال و نانوذره می‌باشند. به منظور بی‌بعدسازی معادلات حل از پارامترها و اعداد بدون بعد ارائه شده در جدول علائم بهره برده شده و در نهایت معادلات بی‌بعدشده به شکل زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (۶)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial(U^2)}{\partial X} + \frac{\partial(UV)}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + Pr \nabla^2 U \quad (۷)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{\partial(V^2)}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + Pr \nabla^2 V + Ra Pr(\theta) \quad (۸)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial(U\theta)}{\partial X} + \frac{\partial(V\theta)}{\partial Y} = \nabla^2 \theta + N_B \left( \frac{\partial \Phi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) + N_T \left( \left( \frac{\partial \theta}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)^2 \right) \quad (۹)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial(U\Phi)}{\partial X} + \frac{\partial(V\Phi)}{\partial Y} = \frac{1}{Le} \nabla^2 \Phi + \frac{N_T}{LeN_R} \nabla^2 \theta \quad (10)$$

حال می‌بینیم که به‌منظور شبیه‌سازی جریان و انتقال حرارت باید پنج معادله فوق در هندسه موردنظر به‌صورت عددی حل گردند. با توجه به توضیحات ارائه شده در بخش قبل در این مقاله، از تکنیک عددی هیبرید FD-LBM با قابلیت محدودکنندگی شار استفاده شده است.

### تکنیک حل عددی هیبرید FD-LBM

همان‌طور که بیان گردید روش حل در این مقاله، روش هیبرید FD-LBM بوده که الگوریتم آن در شکل ۱ قابل مشاهده می‌باشد. در این روش عددی، معادلات ۶-۹ با استفاده از روش شبکه بولتزمن و معادله ۱۰ (با توجه به ترم پخش ضعیف‌تر در لوپس‌های بزرگ‌تر از ۱۰) از روش اختلاف محدود حل می‌شود. در این راستا معادلات تابع توزیع بولتزمن را به همراه توابع توزیع تعادلی آن‌ها برای میدان‌های سرعت و دما در شبکه دو بعدی با ۹ لینک (D2Q9) به شکل زیر می‌نویسیم:

$$f_i(x + c_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(x, t) = -\frac{1}{\tau_v} [f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t)] + \Delta t w_i F, \quad (11)$$

$$g_i(x + c_i \Delta t, t + \Delta t) - g_i(x, t) = -\frac{1}{\tau_\alpha} [g_i(x, t) - g_i^{eq}(x, t)] + \Delta t w_i S. \quad (12)$$

$$f_i^{eq} = w_i \rho \left[ 1 + \frac{c_i \cdot u}{c_s^2} + \frac{1}{2} \frac{(c_i \cdot u)^2}{c_s^4} - \frac{1}{2} \frac{u \cdot u}{c_s^2} \right] \quad (13)$$

$$g_i^{eq} = w_i T \left[ 1 + \frac{c_i \cdot u}{c_s^2} + \frac{1}{2} \frac{(c_i \cdot u)^2}{c_s^4} - \frac{1}{2} \frac{u \cdot u}{c_s^2} \right] \quad (14)$$

این روابط به‌صورت صریح و با گام‌های برخورد<sup>۱</sup> و جاری شدن<sup>۲</sup> حل را در قدم‌های زمانی تعیین‌شده به جلو می‌برند. در این دو معادله  $c_s$  سرعت صوت در شبکه است که در این شبکه برابر با  $c_s = c/\sqrt{3}$  می‌باشد. همچنین  $C_i$ ها و  $w_i$ ها به ترتیب سرعت‌ها و ضرایب وزنی هر لینک می‌باشد و به شکل زیر برای شبکه D2Q9 نوشته می‌شوند:

$$c_i = \begin{cases} 0 & \text{for } i = 0 \\ c \cdot \left[ \cos\left(\frac{i\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{i\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \right] & \text{for } i = 1 - 4 \\ c\sqrt{2} \cdot \left[ \cos\left(\frac{i\pi}{2} - \frac{9\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{i\pi}{2} - \frac{9\pi}{4}\right) \right] & \text{for } i = 5 - 8 \end{cases} \quad (15)$$

<sup>1</sup> Collision

<sup>2</sup> Streaming

$$w_i = \begin{cases} \frac{4}{9} & \text{for } i = 0 \\ \frac{1}{9} & \text{for } i = 1 - 4 \\ \frac{1}{36} & \text{for } i = 5 - 8 \end{cases} \quad (16)$$

کمیت‌ها و روابط فوق توسط بسط چپمن-انگسگوک از طریق پارامتر زمان استراحت خود و به شکل زیر به کمیت‌های ماکرو مرتبط می‌شوند:

$$v = \left[ \tau_v - \frac{1}{2} \right] c_s^2 \Delta t \quad (17)$$

$$\alpha = \left[ \tau_\alpha - \frac{1}{2} \right] c_s^2 \Delta t \quad (18)$$

به منظور کسب اطلاعات بیشتر در رابطه با تکنیک شبکه بولتزمن تک‌زمان استراحت<sup>۱</sup> خوانندگان می‌توانند به مراجع [۸; ۲۱] رجوع کنند. اما معادله ۱۰ باید از روش اختلاف محدود به شکل زیر گسسته‌سازی شود:

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi^{new} - \Phi^{old}}{\Delta \tau} + \frac{(U\Phi)_e - (U\Phi)_w}{\Delta X} + \frac{(U\Phi)_n - (U\Phi)_s}{\Delta Y} = \\ & = \frac{1}{Le} \left( \frac{\Phi(i+1, j) - 2\Phi(i, j) + \Phi(i-1, j)}{\Delta X^2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\Phi(i, j+1) - 2\Phi(i, j) + \Phi(i, j-1)}{\Delta Y^2} \right) + \\ & + \frac{N_T}{Le N_B} \left( \frac{\theta(i+1, j) - 2\theta(i, j) + \theta(i-1, j)}{\Delta X^2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\theta(i, j+1) - 2\theta(i, j) + \theta(i, j-1)}{\Delta Y^2} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

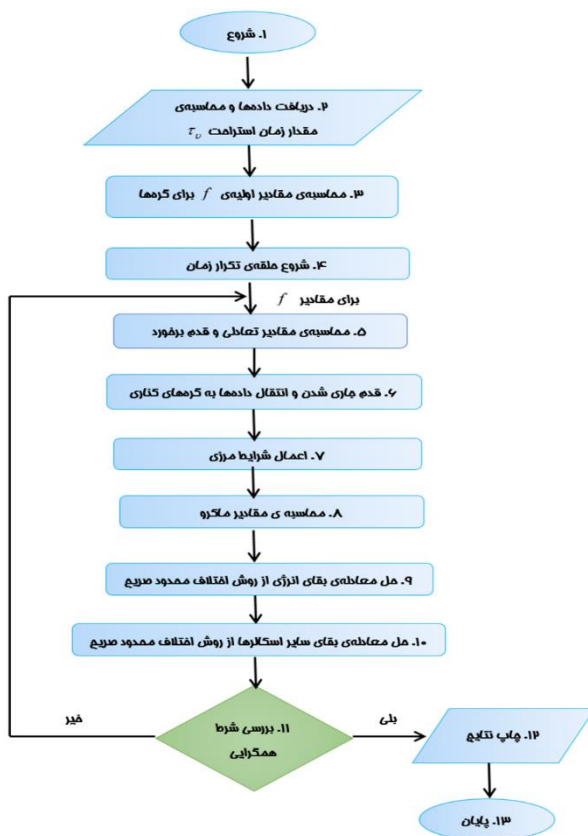
ناگفته پیداست که در این معادله، ترم‌های پخش نه تنها مشکلی در باب همگرایی و پایداری حل ایجاد نمی‌کنند بلکه به میرا کردن نوسانات ناشی از ترم‌های ادواکسیون نیز کمک می‌کنند. لیکن با توجه به اینکه با افزایش لویس این ترم‌ها اهمیت خود را از دست می‌دهند، در راستای تخمین مقادیر  $\Phi_e$ ،  $\Phi_w$ ،  $\Phi_n$  و  $\Phi_s$  باید از یک تکنیک محدودکننده شار مناسب استفاده کرد:

$$\Phi_e = \Phi_p + \frac{1}{2} \psi(r) (\Phi_E - \Phi_p), \quad (20)$$

<sup>1</sup> Single Relaxation Time LBM

در اینجا  $\psi$  همان تابع محدودکننده شار است که برای تخمین مقدار پارامتر  $\Phi$  در میانه راه گره‌ها استفاده می‌شود. یکی از این توابع تابع مین مود می‌باشد که رو<sup>۱</sup> [۱۶] پیشنهاد کرده است:

$$\psi = \begin{cases} \min(r, 1) & \text{if } r > 0 \\ 0 & \text{if } r \geq 0 \end{cases} \quad \text{Minmod} \quad (21)$$



شکل ۱. الگوریتم روش حل عددی FD-LBM با قابلیت TVD.

### تعیین مشخصات نانوسیال

به منظور تعیین مشخصات ترموفیزیکی نانوسیال در سراسر هندسه حل باید از مدل مناسب استفاده گردد. مدل‌های مورد استفاده بدین منظور بسیار متعددند [۲۲؛ ۲۳]، در این مقاله از روابط زیر به منظور محاسبه چگالی، ظرفیت گرمایی ویژه، ضریب انبساط حرارتی و گذردهی الکتریکی نانوسیال براساس درصد حجمی نانوذرات در هر گره استفاده شده است [۲۴]:

<sup>1</sup> Roe

$$\rho_{nf} = (1 - \phi)\rho_f + \phi\rho_s \quad (22)$$

$$(\rho C_p)_{nf} = (1 - \phi)(\rho C_p)_f + \phi(\rho C_p)_s \quad (23)$$

$$(\rho\beta)_{nf} = (1 - \phi)(\rho\beta)_f + \phi(\rho\beta)_s \quad (24)$$

همچنین به منظور محاسبه مقادیر ویسکوزیته و ضریب هدایت حرارتی نانوسیال از مدل پیشنهادی کورسیونه استفاده شده است [۲۵]:

$$\frac{\mu_{nf}}{\mu_f} = \frac{1}{1 - 34.87 \left(\frac{d_p}{d_f}\right)^{-0.3} \phi^{1.03}}, \quad (25)$$

$$\frac{k_{nf}}{k_f} = 1 + 4.4 Re^{0.4} Pr^{0.66} \left(\frac{T}{T_{fr}}\right)^{10} \left(\frac{k_p}{k_f}\right)^{0.03} \phi^{0.66}, \quad (26)$$

در این روابط  $d_p$  و  $d_f$  به ترتیب قطر ذره سیال و قطر نانوذره بود که برابر با ۱۰۰ نانومتر در نظر گرفته شده است. قطر ذره سیال نیز از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$d_f = 0.1 \left(\frac{6M}{N\pi\rho_{f0}}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (27)$$

عدد رینولدز مورد استفاده در رابطه ۲۶ نیز به شکل زیر محاسبه می‌گردد:

$$Re = \frac{2\rho_f k_b T}{\pi\mu_f^2 d_p} \quad (28)$$

همچنین در رابطه ۲۶ کمیت‌های  $T_{fr}$  دمای انجماد سیال پایه و  $k_b$  ثابت بولتزمن (برابر با  $1.38066 \times 10^{-23}$ ) هستند. به منظور دستیابی به جزئیات بیشتر مدل کورسیونه می‌توان به [۲۵] رجوع کرد. همچنین خواص پایه نانوذرات اکسید آلومینیم و سیال آب که در روابط فوق از آن‌ها استفاده گردیده است در جدول ۱ ارائه شده‌اند.

جدول ۱. خواص ترموفیزیکی نانوذرات  $Al_2O_3$  و سیال آب.

	$\mu(kg/ms)$	$\rho(kg/m^3)$	$C_p(J/kgK)$	$K(W/mK)$	$\beta\left(\frac{1}{K}\right) \times 10^{-5}$
آب	۰.۰۰۰۸۹	۹۹۷.۱	۴۱۷۹	۰.۶۱۳	۲۱
$Al_2O_3$ نانوذرات	---	۳۹۷۰	۷۶۵	۴۰	۰.۸۵

## محاسبه تولید آنتروپی

در این مقاله دو نوع بازگشت‌ناپذیری به شکل‌های تولید آنتروپی اصطکاکی و حرارتی در هندسه مورد حل در نظر گرفته شده‌اند. این دو نوع بازگشت‌ناپذیری از روابط تعادل ترمودینامیکی موضعی تئوری انتقال خطی<sup>۱</sup> به شکل زیر قابل محاسبه هستند [۲۶]:

$$S_{friction} = \phi_{ir} \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 \right\} \quad (29)$$

$$S_{Heat} = \left( \frac{\partial \theta}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)^2 \quad (30)$$

تولید آنتروپی کلی سیستم نیز بنابراین از مجموع این دو نوع بازگشت‌ناپذیری قابل محاسبه خواهد بود:

$$S_{tot} = \int_V (S_{friction} + S_{Heat}) dV \quad (31)$$

به‌منظور نشان دادن اهمیت تولید آنتروپی حرارتی در سیستم‌های همراه با انتقال حرارت در مقابل بازگشت‌ناپذیری ناشی از اصطکاک در سیستم عدد بدون بعد بجان به شکل زیر تعریف می‌گردد:

$$Be = \frac{S_{Heat}}{S_{tot}} \quad (32)$$

همچنین مقدار بجان متوسط نیز بیانگر رژیم جریان غالب و به تبع آن نوع تولید آنتروپی اهمیت بالاتری در هندسه خواهد داشت:

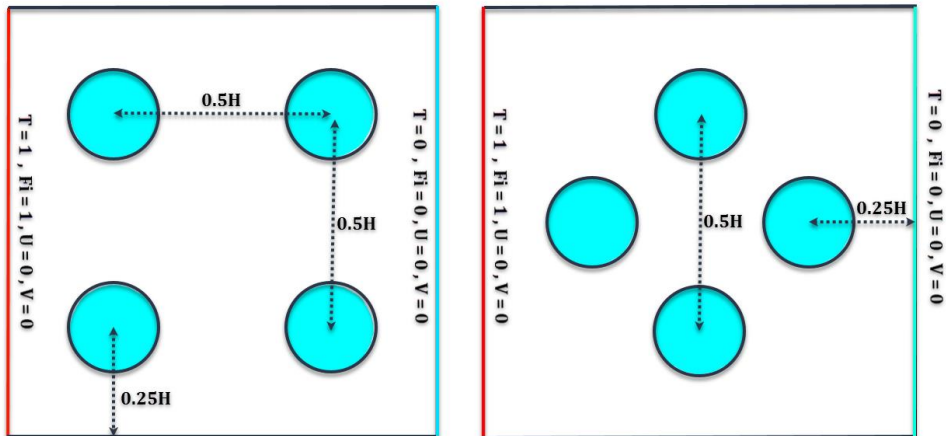
$$Be_{ave} = \frac{\int_A Be(X, Y) \cdot dA}{\int_A dA} \quad (33)$$

<sup>1</sup> Local thermodynamic equilibrium of the linear transport Theory

## تکنیک حل و اعتبارسنجی

### هندسه و شرایط مرزی

شماتیکی از هندسه مسئله موردنظر به همراه دو چیدمان مختلف (مربعی و لوزی) برای موانع دایروی در شکل ۲ ارائه شده است. در این دو شکل هندسه، یک حفره بسته شامل چهار مانع دایروی با ضریب منظر  $0/1$  بوده که شار حرارت و درصد حجمی نانوذرات بر روی مرزهای شمال و جنوب آن صفر فرض می‌گردد. در هر دو چیدمان دیواره شرقی در دما و درصد حجمی ذرات برابر با  $T = 0$  و  $\phi = 0$  قرار دارد و شرط مرزی برای دیواره غربی  $T = 1$  و  $\phi = 1$  لحاظ می‌گردد. فاصله مرکز موانع در چیدمان مربعی با دیواره‌های افقی و عمودی  $0.25H$  و  $0.75H$  و در چیدمان لوزی برابر با  $0.25H$ ،  $0.5H$  و  $0.75H$  در نظر گرفته شده است. هر چهار دیواره حفره ساکن و صلب فرض شده و شرط عدم لغزش بر روی آن‌ها لحاظ می‌گردد. علاوه بر این جریان سیال در هندسه تنها به واسطه نیروی شناوری ناشی از جاذبه به‌وجودآمده و تنها مکانیزم‌های لغزش نانوذرات لحاظ شده مکانیزم‌های حرکت پروانی و ترموفورسیس هستند.

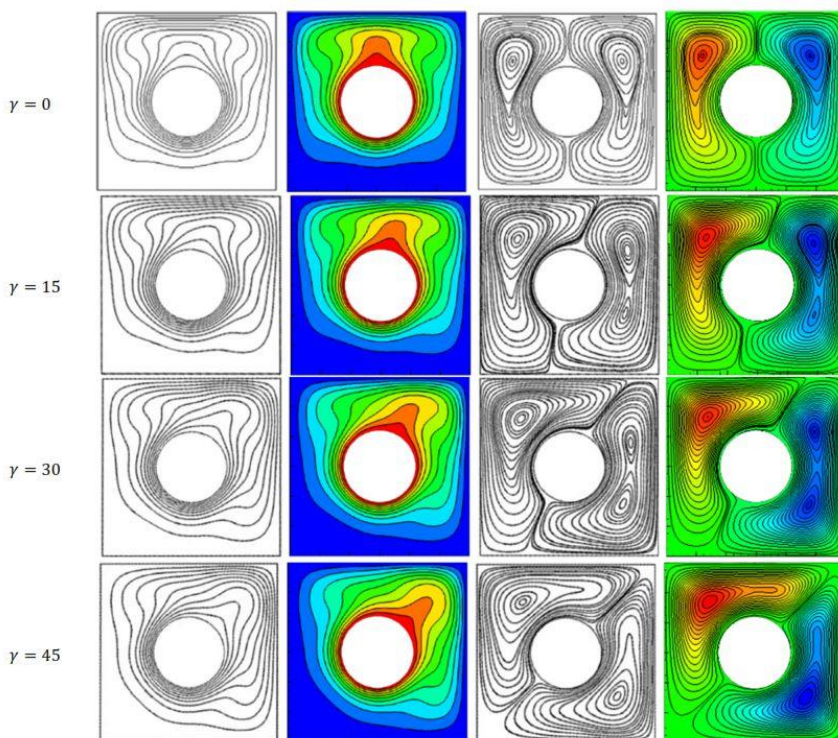


شکل ۲. چیدمان‌های مربعی (سمت چپ) و لوزی (سمت راست) برای چهار مانع تعبیه شده در هندسه مورد بررسی.

### اعتبارسنجی و استقلال از شبکه

در این پژوهش از نرم‌افزار فرترن ۹۰ با توجه به سرعت قابل قبول آن در شبیه‌سازی‌های عددی استفاده گردیده است. همان‌طور که پیشتر بیان گردید روش هیبرید FD-LBM به‌منظور حل مسئله مذکور پیشنهاد شده است. در این روش، معادلات ناویر استوکس و بقای انرژی از روش SRT-LBM استاندارد و معادله بقای غلظت نانوذرات- با

توجه به پایین تر بودن ضریب پخش آن- از روش اختلاف محدود با قابلیت TVD حل می‌گردد. به منظور اعتبارسنجی روش حل، نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌های کد پیشنهادی با نتایج ارائه شده در چند مقاله مختلف مقایسه گردید. نخست به منظور نشان دادن دقت این روش عددی در مواجهه با مرزهای منحنی، مسئله جابه‌جایی آزاد هندسه حفره بسته حاوی یک مانع دایروی با  $Ra=10^5$ ،  $Pr=6.2$  و  $Ar=0.2$  که پارک و همکاران [۲۷] بحث و بررسی کرده‌اند، شبیه‌سازی می‌گردد. همان‌طور که در تصویر ۳ مشخص است در اینجا نتایج مربوط به خطوط جریان و دما ثابت برای چهار زاویه قرارگیری مختلف حفره نسبت به افق مقایسه شده است. در قدم بعدی به منظور نمایش قابلیت کد در شبیه‌سازی جریان‌های غیرهمگن، نتایج ناسلت و شروود متوسط با ۱۲ مورد مختلف از نتایج کیفیتی [۲۸] اعتبارسنجی شد که در جدول ۲ قابل رویت هستند. در نهایت نتایج پروفیل دما در خط مرکزی حفره برای جریان نانوسیال آب/مس با درصد حجمی ۱۰ درصد با نتایج عددی و تجربی خنفر و همکاران [۲۹] و جهان‌شاهی و همکاران [۳۰] مقایسه گردید. در این بررسی، عدد گراشف برابر با  $10^5$  و عدد پرانتل برابر با  $6/2$  فرض شد که نتایج در شکل ۴ نمایش داده شده است. در تمامی موارد فوق، نتایج ناشی از شبیه‌سازی کد موجود تطابق بسیار خوبی با نتایج منتشر شده از خود نشان دادند.



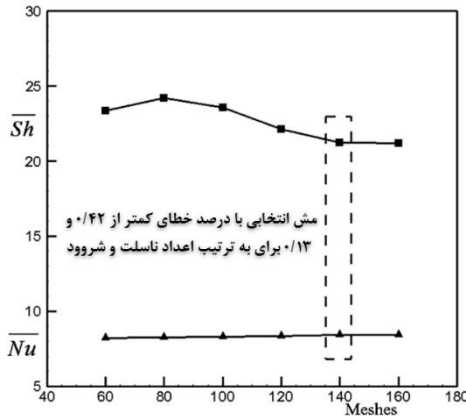
شکل ۳. خطوط جریان و دما ثابت حاصل از شبیه‌سازی حاضر (سمت راست) و پارک و همکاران [۲۷] (سمت چپ) برای  $Ra=10^5$  و  $Pr=6.2$  و ضریب منظر  $0/2$  در چهار زاویه قرارگیری متفاوت حفره با افق.

جدول ۲. مقایسه نتایج  $Nu_{ave}$  و  $Sh_{ave}$  برای مطالعه حاضر و نتایج منتشر شده از کفایتی [۲۸] برای  $Ra = 10^4$

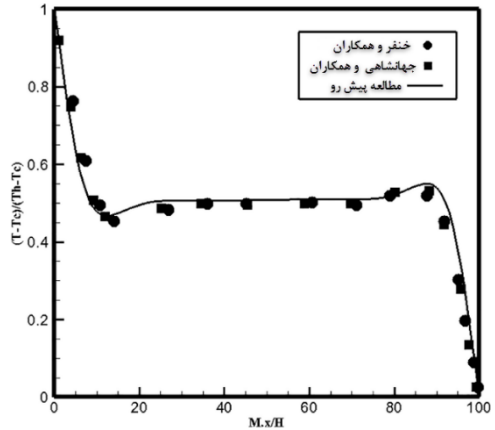
$$Le = 2.5, 5, 10^5$$

	Le=2.5			Le=5		
$Ra=10^4$	$N_{Bouyancy} = -1$	$N_{Bouyancy} = 0.1$	$N_{Bouyancy} = 1$	$N_{Bouyancy} = -1$	$N_{Bouyancy} = 0.1$	$N_{Bouyancy} = 1$
$Nu_{ave}$ (Kefayati)	۱.۱۴۹۶	۲.۳۳۴۱	۲.۶۱۷۳	۱.۲۷۸۹	۲.۳۱۶۵	۲.۴۶۱۰
$Sh_{ave}$ (Kefayati)	۱.۶۰۰۷	۳.۷۰۴۴	۴.۲۱۳۴	۲.۴۶۴۱	۵.۳۱۳۶	۵.۸۷۶۷
$Nu_{ave}$ (Present study)	۱.۱۴۷۲	۲.۳۳۱۰	۲.۶۰۵۴	۱.۲۴۱۴	۲.۳۰۲۹	۲.۴۳۵۰
$Sh_{ave}$ (Present study)	۱.۶۱۲۴	۳.۸۱۷۳	۴.۳۸۱۳	۲.۳۱۹۱	۵.۱۷۲۴	۵.۷۸۶۷
$Ra=10^5$	$N_{Bouyancy} = -1$	$N_{Bouyancy} = 0.1$	$N_{Bouyancy} = 1$	$N_{Bouyancy} = -1$	$N_{Bouyancy} = 0.1$	$N_{Bouyancy} = 1$
$Nu_{ave}$ (Kefayati)	۲.۰۳۰۱	۴.۹۹۶۶	۵.۵۰۴۰	۲.۲۳۹۵	۴.۹۶۶۷	۵.۲۰۴۴
$Sh_{ave}$ (Kefayati)	۳.۱۶۵۹	۸.۲۵۰۲	۹.۱۸۱۳	۴.۶۷۳۱	۱۱.۶۲۸	۱۲.۸۰۶
$Nu_{ave}$ (Present study)	۲.۰۷۲۴	۵.۰۹۵۵	۵.۵۲۱۰	۲.۲۵۵۷	۴.۹۸۴۸	۵.۳۳۲۰
$Sh_{ave}$ (Present study)	۳.۲۴۲۸	۸.۴۶۶۲	۹.۲۹۰۹	۴.۷۳۸۸	۱۱.۷۲۳۷	۱۲.۹۹۲۱

پس از اعتبارسنجی نتایج، آنالیز استقلال از شبکه به منظور نشان دادن کافی بودن ترکیب مش مورد استفاده در این مقاله نیز انجام گرفت. بدین منظور عدد ناسلت و شروود متوسط برای  $Ra=10^5$ ،  $Le=100$  و درصد حجمی ۲ درصد در هندسه حفره بسته حاوی یک مانع بیضوی با ضرایب منظر  $Ar_x=0.2$  و  $Ar_y=0.1$  برای ۶ ترکیب مش متفاوت  $60 \times 60$ ،  $80 \times 80$ ،  $100 \times 100$ ،  $120 \times 120$ ،  $140 \times 140$  و  $160 \times 160$  بررسی گردیدند. براساس نتایج به دست آمده مشخص شد که تغییرات کمیت‌های  $Nu_{ave}$  و  $Sh_{ave}$  بعد از مش  $140 \times 140$  به ترتیب به کمتر از ۰/۴۲ و ۰/۱۳ رسید و با توجه به ناچیز بودن این مقادیر می‌توان از ریزتر کردن مش صرف نظر کرد. بنابراین در ادامه این مقاله از همین مش در شبیه‌سازی‌ها استفاده می‌گردد. نتایج مربوط به آنالیز استقلال از شبکه در شکل ۵ ارائه گردیده است.



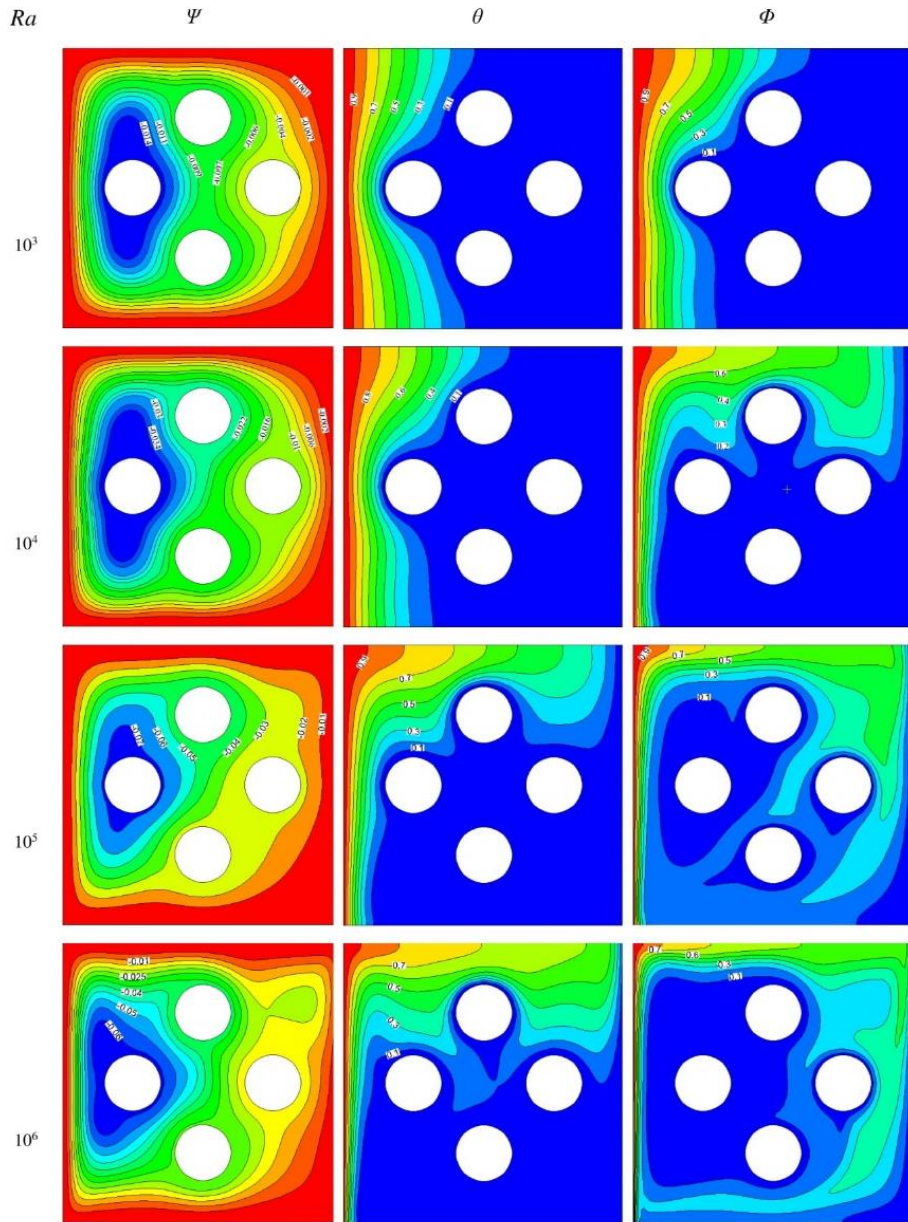
شکل ۵. نتایج به دست آمده برای مقادیر ناسلت (مثلث) و شروود متوسط (مربع) در ۶ ترکیب مش مختلف به منظور نشان دادن نتایج مستقل از مش.



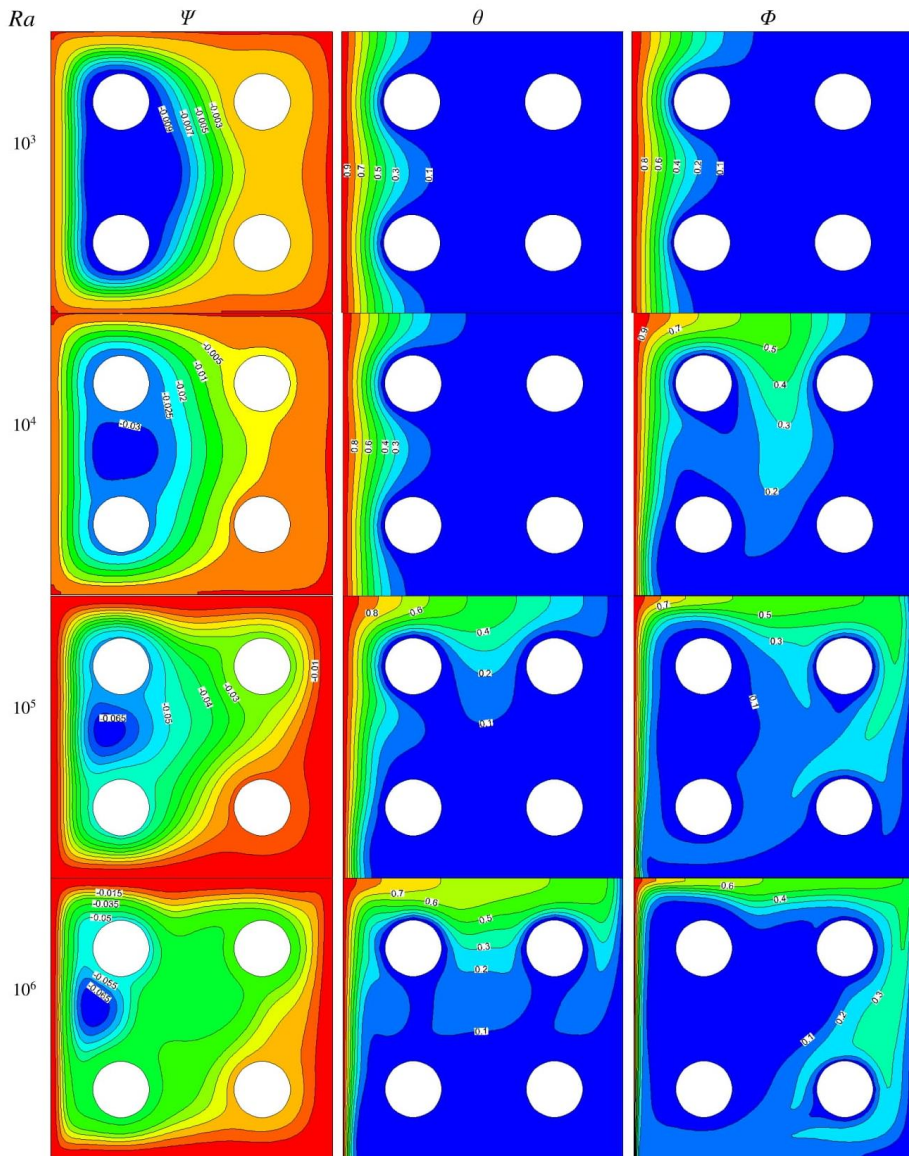
شکل ۴. اعتبارسنجی نتایج به دست آمده با پژوهش‌های خنفر و همکاران [۲۹] و جهانشاهی و همکاران [۳۰] برای نانوسیال آب/مس در  $Gr=10^5$  و درصد حجمی ۱۰ درصد.

## بحث و بررسی نتایج

همان‌طور که گفته شد در این مقاله تأثیرات تغییرات  $Le$ ،  $Ra$  و درصد حجمی نانوذرات سیال بر نرخ نفوذ ذرات، نرخ انتقال حرارت و نرخ تولید آنتروپی سیال برای دو چیدمان مختلف لوزی و مربع بررسی شده است. تصاویر ۶ و ۷ خطوط جریان، خطوط دما ثابت و خطوط غلظت ثابت را برای اعداد ریلی  $10^3$ ،  $10^4$ ،  $10^5$  و  $10^6$  به ترتیب برای چیدمان‌های لوزی و مربع نمایش می‌دهد. با توجه به شکل ۶ همان‌طور که قابل پیش‌بینی نیز بود، با افزایش عدد ریلی، تراکم خطوط دما و غلظت ثابت روی دیواره غربی افزایش می‌یابد. این مسئله موجب افزایش عدد ناسلت و شروود متوسط بر این دیواره می‌شود لیکن از طرف دیگر مشاهده می‌شود که در یک عدد ریلی ثابت، میزان پخش شدگی پروفیل غلظت، بیشتر از پروفیل دماست که این امر ناشی از بزرگ‌تر بودن عدد لوویس نسبت به عدد پرانتل سیال است ( $Le=10$  و  $Pr=6/2$ ). این افزایش در ضریب نفوذ غلظت، موجب پخش بیشتر خطوط شار ثابت در هندسه نسبت به خطوط دما ثابت می‌گردد. اما در کانتورهای شکل ۷ می‌توان تأثیر عوض کردن چیدمان موانع سرد را بر خطوط جریان و پروفیل‌های دما و غلظت مشاهده کرد. با توجه به اینکه موانع، سرد فرض شده‌اند؛ نزدیک شدن هندسه آنها به دیواره گرم می‌تواند موجب افزایش نرخ انتقال حرارت شود و همین موضوع درباره نرخ انتقال غلظت از دیواره غربی نیز صادق است. اما در عمل آنچه از این شکل‌ها برمی‌آید این است که چیدمان لوزی، تابع جریان بالاتری نسبت به چیدمان مربع ارائه می‌دهد. این امر بدین معنی است که در چیدمان مربع، سرعت جریان عبوری از روی دیواره و موانع، به نسبت کمتر از چیدمان لوزی است و این پدیده به‌خودی‌خود می‌تواند نرخ ناسلت و شروود متوسط دیواره را کاهش دهد.



شکل ۶. خطوط جریان، خطوط دما ثابت و خطوط غلظت ثابت برای  $Pr=6.2$ ،  $\phi=0\%$  و  $Le=10$  در ریبلی‌های  $10^3$ ،  $10^4$ ،  $10^5$  و  $10^6$  و چهار مانع در وضعیت لوزی.

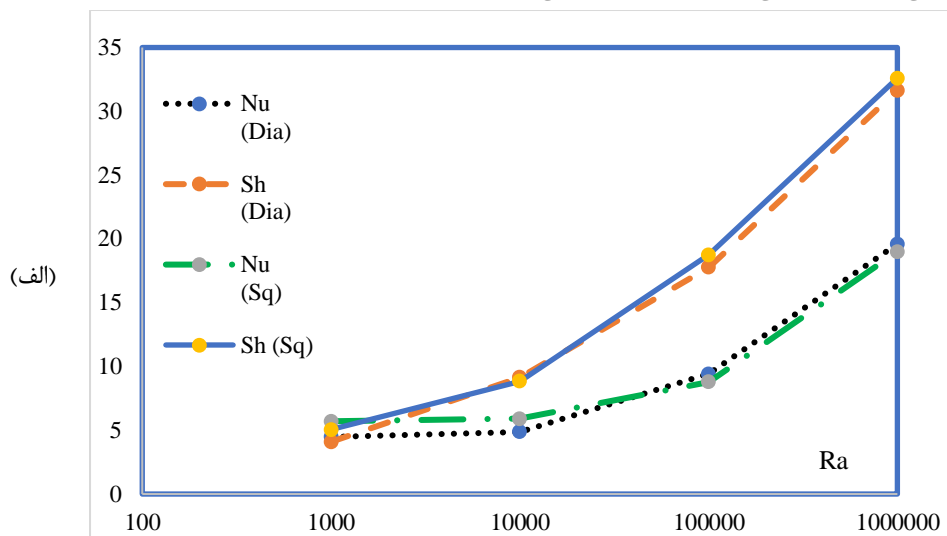


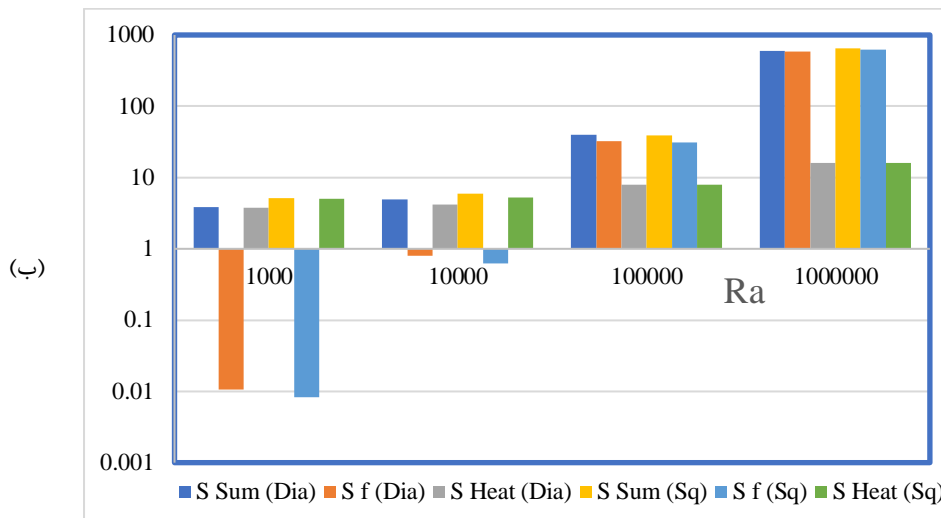
شکل ۷. خطوط جریان، خطوط دما ثابت و خطوط غلظت ثابت برای  $Pr=6.2$  و  $\phi=0\%$  و  $Le=10$  در ریلی‌های  $10^3$ ،  $10^4$ ،  $10^5$  و  $10^6$  و چهار مانع در وضعیت مربعی.

ایجاد یک گردابه نسبتاً بزرگ بین دو مانع غربی چیدمان مربعی می‌تواند موجب افزایش اصطکاک در این ناحیه شود و قدری از انرژی جریان را تلف کند، در حالی که در چیدمان لوزی، نه تنها فقط یک مانع در مجاورت این دیواره قرار دارد (که خود موجب کاهش اتلاف انرژی جریان می‌شود) بلکه نحوه قرارگیری آن نیز موجب می‌شود گردابه

دیگری در مجاورت این دیوار ایجاد نگردد. حال باید تقابل این دو پدیده را در برابر تغییرات اعمالی در پارامترهای فعال در این پژوهش مشاهده و بررسی کنیم.

نخست تغییرات عدد ریلی را مدنظر قرار می‌دهیم. شکل ۸- الف مقادیر ناسلت و شروود متوسط را برای دو چیدمان مذکور در ریلی‌های مختلف نشان می‌دهد. در این تصویر، عدد لوئیس برابر با ۱۰ فرض می‌گردد و درصد حجمی نانوذرات نیز صفر در نظر گرفته می‌شود. مشاهده می‌گردد که در ریلی‌های پایین و متوسط، عدد ناسلت در چیدمان مربعی بزرگ‌تر می‌باشد در حالی که با افزایش ریلی، ناسلت در چیدمان لوزی کم‌کم بزرگ‌تر می‌شود. این پدیده به واسطه غالب بودن ترم نفوذ در ریلی‌های پایین و قدرت یافتن بخش هم‌رفت در ریلی‌های بالاتر ایجاد می‌گردد. اما درباره عدد شروود با توجه به بالاتر بودن لوئیس نسبت به پرانتل این پدیده مشاهده نمی‌گردد و تقریباً در همه ریلی‌ها چیدمان مربعی شروود بالاتری را ارائه می‌دهد.



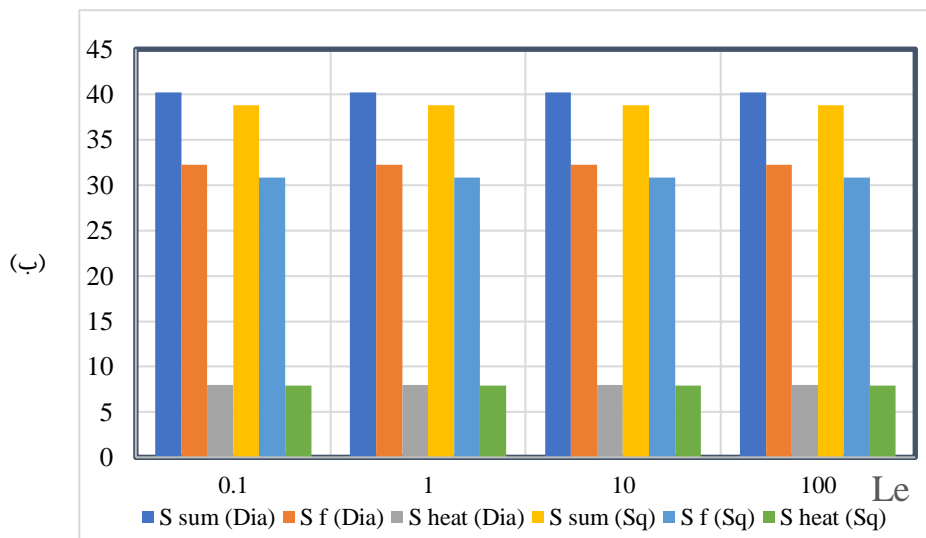
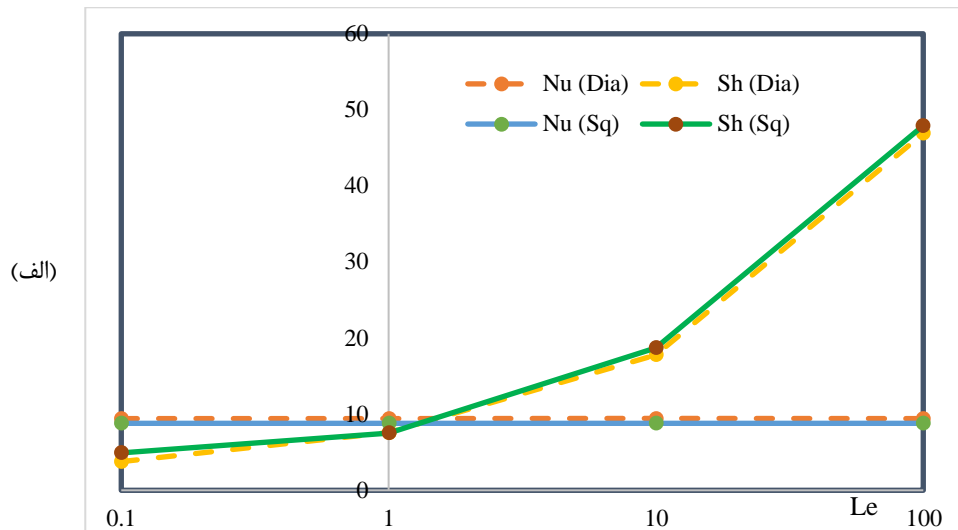


شکل ۸. الف) اعداد ناسلت و شروود متوسط برای دو چیدمان مربعی و لوزی، ب) تولید آنتروپی اصطکاکی، حرارتی و کلی برای دو چیدمان مربعی و لوزی (بر روی محور لگاریتمی) در ریلی‌های مختلف و  $Le=10$ .

مضاف بر این مسئله، همان‌طور که در نمودار ستونی شکل ۸-ب مشاهده می‌گردد، تولید آنتروپی سیستم با افزایش عدد ریلی، به‌صورت نمایی افزایش می‌یابد. با افزایش عدد ریلی، سرعت جریان سیال در سیستم افزایش می‌یابد که با این افزایش، به‌طور مشخص نرخ تولید آنتروپی اصطکاکی (مستقیماً) و حرارتی (غیرمستقیم با افزایش گرادیان دما در سیستم) افزایش می‌یابند. نکته حائز اهمیت در این بررسی این است که تولید آنتروپی به‌جز در ریلی‌های پایین که اصولاً مقدار ناچیزی دارد، اغلب در چیدمان مربعی، بزرگ‌تر یا مساوی با لوزی است. این امر تقریباً در هیچ‌یک از ریلی‌ها وابسته به مؤلفه حرارتی تولید آنتروپی نمی‌باشد و تنها عامل آن بخش اصطکاکی تولید آنتروپی در سیستم است.

تصویر ۹-الف اعداد ناسلت و شروود متوسط را بر دیواره غربی برای درصد حجمی‌های مختلف نانوذرات  $Al_2O_3$  در  $Le=10$  و  $Ra=10^5$  ارائه می‌دهد. همان‌طور که در برخی مقالات دیگر نیز به این مهم اشاره شده است [۱۸؛ ۱۹]، افزودن نانوذرات با گذردهی حرارتی متوسط (مانند اکسیدهای فلزات) ممکن است مشخصاً منجر به افزایش انتقال حرارت سیستم نشود. در این نمودار نیز مشاهده می‌شود که با افزایش نانوذرات نه‌تنها نرخ انتقال حرارت از دیواره افزایش نمی‌یابد بلکه در  $\varphi = 9\%$  مقدار ناسلت نزدیک به ۱۵ درصد کاهش می‌یابد. این پدیده به علت ضعیف شدن تابع جریان و به تبع آن، کاهش سرعت در سیستم و کافی نبودن اثر افزایشی گذردهی حرارتی نانوسیال اتفاق می‌افتد. این پدیده موجب شده که در هر دو چیدمان توابع ناسلت و شروود با افزایش درصد حجمی رویه نزولی به خود بگیرند. اما این رویه برای هر دو چیدمان، شیب یکسانی ندارد. همان‌طور که مشاهده می‌شود در چیدمان مربعی، شیب نزولی کندتر از نمودار حالت لوزی است. از همین رو مقدار شروود برای حالت مربعی در درصدهای بالاتر از ۶ از نمودار لوزی پیشی می‌گیرد. این امر در نمودارهای تصویر ۹-ب نیز مشهود است. با افزایش درصد حجمی تولید آنتروپی اصطکاکی

و به تبع آن تولید آنتروپی کلی سیستم کاهش می‌یابد، لیکن نرخ کاهش در چیدمان لوزی، سریع‌تر از مربعی است؛ زیرا در این چیدمان، تابع جریان حالت  $\varphi=0$  بزرگ‌تر و قوی‌تر از حالت مربعی است.



شکل ۱۰. الف) اعداد ناسلت و شروود متوسط برای دو چیدمان مربعی و لوزی، ب) تولید آنتروپی اصطکاکی،

حرارتی و کلی برای دو چیدمان مربعی و لوزی در اعداد لوویس مختلف در  $\varphi=0$  و  $Ra=10^5$

شکل ۱۰-الف و ب نیز تأثیر افزایش لوویس را در ریلی  $10^5$  و درصد حجمی نانوسیال صفر بر نرخ انتقال حرارت و تولید آنتروپی سیستم نمایش می‌دهد. ناگفته پیداست که تغییر لوویس، تأثیر چندانی بر عدد ناسلت در این هندسه

نخواهد داشت. این امر برای هر دو چیدمان تقریباً به شکل مشابهی در تصویر ۱۰ -الف مشهود است لیکن با افزایش لویس عدد شروود در سیستم به سرعت افزایش می‌یابد. این افزایش نیز برای هر دو چیدمان، روند ثابتی دارد. مشابه همین مسئله در مورد تولید آنتروپی سیستم نیز صادق است و علی‌رغم اینکه به‌طور کلی تولید آنتروپی در چیدمان لوزی بالاتر است، با افزایش عدد لویس مقدار تولید آنتروپی حرارتی، اصطکاکی و کلی در سیستم نیز تقریباً ثابت می‌ماند (شکل ۱۰-ب).

به‌منظور درک بهتر کمی و کیفی نحوه تولید آنتروپی در سیستم، جدول ۳ اطلاعات کامل و جامعی درباره نرخ تولید آنتروپی کلی، هریک از مؤلفه‌های حرارتی و اصطکاکی، تابع جریان و عدد بجان به‌دست‌آمده در هر مرحله از کار ارائه می‌دهد. همچنین به‌منظور مقایسه بین دو کمیت تولید آنتروپی اصطکاکی و حرارتی در این جدول، عدد بجان ارائه گردیده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش مقدار ریلی، عدد بجان - بر عکس تابع جریان که رشد می‌کند- به‌سرعت کاهش می‌یابد. این امر به‌واسطه افزایش تصاعدی تولید آنتروپی اصطکاکی در مقایسه با تولید آنتروپی حرارتی در سیستم اتفاق می‌افتد. این روند با افزایش  $\phi$  نیز قابل مشاهده است؛ بدین معنی که با افزایش درصد حجمی نانوذرات تولید آنتروپی اصطکاکی نسبت به تولید آنتروپی حرارتی تضعیف می‌شود و در نتیجه عدد بجان در هر دو چیدمان رشد می‌کند.

جدول ۳. پارامترهای بازگشت‌ناپذیری به همراه تابع جریان در دو چیدمان مختلف موانع مربعی (سبز) و لوزی (آبی).

		SI sum	SI fr	SI ht	Stream function	bej av					
Ra	۱۰ <sup>۳</sup>	۳.۸۱۷۹۳	۵.۰۹۰۰۵	۰.۰۰۱۰۶	۰.۰۰۸۳۹	۳.۸۰۷۳	۵.۰۰۸۱۷۶	۰.۲۰۷۵	۰.۱۷۸۶	۰.۶۴۷۲	۰.۷۶۰۸
	۱۰ <sup>۴</sup>	۴.۹۷۵۵۰	۵.۹۱۰۳۰	۰.۷۹۳۵۹	۰.۶۲۷۳۴	۴.۱۸۱۹	۵.۲۸۲۹	۱.۷۱۹۷	۱.۵۳۸۸	۰.۳۸۲۸۹	۰.۳۸۲۹۹
	۱۰ <sup>۵</sup>	۴۰.۲۴۸۷	۳۸.۸۰۴۴	۳۲.۲۵۹۱	۳۰.۸۶۴۵	۷.۹۸۹۶	۷.۹۳۹۹	۹.۸۳۴۵	۹.۴۲۰۵	۰.۱۶۳۵۳	۰.۱۵۶۱۵
	۱۰ <sup>۶</sup>	۶۰۳.۱۳۶	۶۴۳.۸۴۷	۵۸۶.۹۹۹	۶۲۷.۸۶۰۴	۱۶.۱۳۷	۱۵.۹۸۷	۲۷.۷۳۸	۳۰.۵۳۸	۰.۰۵۵۹	۰.۰۴۵۷
$\phi$	۰	۴۰.۲۴۸۸	۳۸.۸۰۴۰	۳۲.۲۵۹۱	۳۰.۸۶۴۱	۷.۹۸۹۶	۷.۹۳۹۸	۹.۸۳۴۲	۹.۴۳۱۵	۰.۱۶۳۵	۰.۱۵۶۱۵
	۳	۳۷.۳۹۵۵	۳۵.۷۸۹۳	۲۹.۴۱۱۹	۲۷.۸۰۳۷	۷.۹۸۳۵	۷.۹۸۵۶	۱۰.۰۰۶	۹.۵۱۹۹	۰.۱۶۹۲	۰.۱۶۳۷۹
	۶	۳۶.۰۵۹۳	۳۴.۲۸۱۶	۲۸.۲۳۴۰	۲۶.۳۹۲۷	۷.۸۲۵۲	۷.۸۸۸۹	۹.۹۲۹۱	۹.۴۲۹۲	۰.۱۷۰۲	۰.۱۶۶۶۹
	۹	۳۴.۴۲۶۷	۳۲.۴۹۵۱	۲۶.۸۴۶۵	۲۴.۷۶۵۸	۷.۵۸۰۱	۷.۷۲۹۲	۹.۶۰۶۴	۹.۱۵۶۵	۰.۱۷۰۷	۰.۱۶۷۴۶
Le	۰.۱	۴۰.۲۴۸۷	۳۸.۸۰۴۰	۳۲.۲۵۹۰	۳۰.۸۶۴۱۵	۷.۹۸۹۶	۷.۹۳۹۸	۹.۸۳۷۰	۹.۴۳۱۴	۰.۱۶۳۵	۰.۱۵۶۱۵
	۱	۴۰.۲۴۸۸	۳۸.۸۰۴۰	۳۲.۲۵۹۷	۳۰.۸۶۴۱۴	۷.۹۸۹۶	۷.۹۳۹۸	۹.۸۳۴۲	۹.۴۳۱۵	۰.۱۶۳۵۳	۰.۱۵۶۱۶
	۱۰	۴۰.۲۴۸۷	۳۸.۸۰۴۴	۳۲.۲۵۹۱	۳۰.۸۶۴۵۵	۷.۹۸۹۶	۷.۹۳۹۹	۹.۸۳۴۵	۹.۴۲۰۵	۰.۱۶۳۵	۰.۱۵۶۱۵
	۱۰۰	۴۰.۲۴۸۵	۳۸.۸۰۴۰	۳۲.۲۵۸۹	۳۰.۸۶۴۱۵	۷.۹۸۹۶	۷.۹۳۹۸	۹.۸۳۴۵	۹.۴۳۱۶	۰.۱۶۳۵	۰.۱۵۶۱۵

## نتیجه‌گیری

در این پژوهش، از یک روش عددی هیبرید نوین FD-LBM به‌منظور شبیه‌سازی جریان نانوسیال AL<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/آب در یک حفره بسته حاوی چهار مانع دایروی با دو چیدمان مختلف لوزی و مربعی استفاده شده است. پارامترهای فعال

در این پژوهش عدد ریلی، لویس و درصد حجمی نانوذرات می‌باشند که با توجه به دو چیدمان مختلف برای مانع‌ها نتایج کلی زیر به دست آمد:

- با افزایش عدد ریلی در هر دو چیدمان ناسلت و شروع متوسط دیوار افزایش می‌یابد، این افزایش برای هر دو چیدمان لوزی و مربعی، روند مشابهی دارد.
- در چیدمان لوزی به‌طور کلی با توجه به تشکیل نشدن گردابه در نزدیکی دیوار، تابع جریان در ریلی‌های مختلف بزرگ‌تر است. این امر موجب می‌شود که تولید آنتروپی اصطکاکی و حرارتی نیز در موارد مختلف معمولاً برای این چیدمان بزرگ‌تر باشد.
- با افزودن درصد حجمی نانوذرات برخلاف آنچه انتظار می‌رود در هر دو هندسه مقادیر ناسلت و شروع افت می‌کند که این کاهش، با توجه به کوچک‌تر شدن تابع جریان قابل توجه است.
- با توجه به کاهش سرعت در سیستم با افزایش نانوذرات مقدار تولید آنتروپی اصطکاکی و به تبع آن تولید آنتروپی کلی سیستم روند نزولی می‌یابد.
- در نهایت تأثیر عدد لویس مستقیماً بر عدد شروع می‌باشد و به‌طور کلی تأثیر آن بر عدد ناسلت یا تولید آنتروپی در سیستم قابل چشم‌پوشی است.
- با افزایش ریلی و کاهش درصد حجمی نانوذرات، درصد تولید آنتروپی اصطکاکی در سیستم نسبت به حرارتی، افزایش و در نتیجه عدد بجان کاهش می‌یابد.

### جدول علائم

علامت اختصاری	تعریف کمیت	رابطه
$c$	سرعت شبکه	
$c_i$	سرعت شبکه مجزا	
$C_p$	گرمای مخصوص در فشار ثابت	
$F$	نیروی خارجی	
$f$	تابع توزیع چگالی	
$f^{eq}$	تابع توزیع تعادلی چگالی	
$g$	تابع توزیع دما	
$g^{eq}$	تابع توزیع تعادلی دما	
$g_y$	شتاب جاذبه زمین	
$M$	تعداد گره‌ها در راستای $y$	
$Nu$	عدد ناسلت	$Nu = -\frac{\partial \theta}{\partial n}$
$Sh$	عدد شروع	$Sh = -\frac{\partial \Phi}{\partial n}$
$Pr$	عدد پراتل	$Pr = \frac{\nu_f}{\alpha_f}$

رابطه	تعریف کمیت	علامت اختصاری
$Ra = \frac{g\beta_f(T_h - T_c)H^3}{\nu_f\alpha_f}$	عدد ریلی	$Ra$
$Le = \frac{\alpha_f}{D_B}$	عدد لوپس	$Le$
	دما	$T$
	درصد حجمی نانوذرات در هر گره	$\phi$
$\theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}$	دما بی بعد	$\theta$
$\Phi = \frac{\phi - \phi_c}{\phi_h - \phi_c}$	درصد حجمی بی بعد نانوذرات در هر گره	$\Phi$
	تولید آنتروپی به واسطه X	$S_x$
	سیستم مختصات دکارتی X و Y	$x, y$
$\frac{x}{H} \text{ or } \frac{y}{H}$	سیستم مختصات دکارتی بی بعد X و Y	$X, Y$
	سرعت در سیستم مختصات دکارتی X و Y	$u, v$
$U, V = \frac{u, v}{\alpha_f H}$	سرعت بی بعد در سیستم مختصات دکارتی X و Y	$U, V$
	زمان	$t$
$\tau = \frac{t}{H^2 \alpha_f}$	زمان بی بعد	$\tau$
	فشار	$P$
$P^* = \frac{P}{(\rho_f \alpha_f^2) H^2}$	فشار بی بعد	$P^*$
$N_T = \frac{(\rho c)_P D_T (T_h - T_c)}{(\rho c)_f T_c \alpha_f}$	پارامتر بی بعد ترموفورسیس	$N_T$
$N_B = \frac{(\rho c)_P D_B (\phi_h - \phi_c)}{(\rho c)_f \alpha_f}$	پارامتر بی بعد حرکت براونی	$N_B$
	ضریب پخش حرارت	$\alpha$
	ضریب انبساط حرارتی	$\beta$
	تابع محدودکننده شار	$\psi(r)$
	ضریب وزنی در جهت i	$\omega_i$
	زمان استراحت برای جریان	$\tau_v$
	زمان استراحت برای دما	$\tau_a$
	ویسکوزیته سینماتیکی	$\nu$
	ویسکوزیته دینامیکی	$\mu$
	چگالی	$\rho$

## References

- [1] Benos, L., & Sarris, I. E. (2019). Analytical study of the magnetohydrodynamic natural convection of a nanofluid filled horizontal shallow cavity with internal heat generation. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 130, 862-873. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.11.004>
- [2] Chiam, H. W., Azmi, W. H., Adam, N. M., & Ariffin, M. K. A. M. (2017). Numerical study of nanofluid heat transfer for different tube geometries – A comprehensive review on performance. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 86, 60-70. <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2017.05.019>
- [3] Tawfik, M. M. (2017). Experimental studies of nanofluid thermal conductivity enhancement and applications: A review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 75, 1239-1253. <https://doi.org/10.1016/j.rser.2016.11.111>
- [4] Fujii, K. (2005). Progress and future prospects of CFD in aerospace—Wind tunnel and beyond. *Progress in Aerospace Sciences*, 41(6), 455-470. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2005.09.001>
- [5] Mavriplis, D. J. (2019, June 17-21). *Progress in CFD discretizations, algorithms and solvers for aerodynamic flows*. AIAA Aviation 2019 Forum, Dallas, Texas. <https://doi.org/10.2514/6.2019-2944>
- [6] Guo, Z., & Shu, C. (2013). *Lattice Boltzmann method and its application in engineering*. World Scientific. <https://books.google.com/books?hl=en&lr=&id=aDG7CgAAQBAJ&oi=fnd&pg=PR5&dq=Lattice+Boltzmann+method+and+its+application+in+engineering.&ots=YyO3SVZ07z&sig=cQNC704pnWdOW7yPHRhXcRenfls#v=onepage&q=Lattice%20Boltzmann%20method%20and%20its%20application%20in%20engineering.&f=false>
- [7] Versteeg, H. K., & Malalasekera, W. (1995). *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*. Longman. <https://www.amazon.com/Introduction-Computational-Fluid-Dynamics-Approach/dp/0582218845>
- [8] Mohamad, A. (2011). *Lattice Boltzmann Method: Fundamentals and Engineering Applications with Computer Codes* (2 ed.). Springer London. <https://doi.org/10.1007/978-0-85729-455-5>
- [9] Salmon, R. (1988). Hamiltonian fluid mechanics. *Annual review of fluid mechanics*, 20(1), 225-256. <https://www.annualreviews.org/doi/abs/10.1146/annurev.fl.20.010188.001301>
- [10] Latt, J., Chopard, B., & Albuquerque, P. (2005). Spatial coupling of a lattice Boltzmann fluid model with a finite difference Navier-Stokes solver. *arXiv preprint physics/0511243*, 1-10. [https://www.researchgate.net/profile/Paul-Albuquerque/publication/2174566\\_Spatial\\_Coupling\\_of\\_a\\_Lattice\\_Boltzmann\\_fluid\\_model\\_with\\_a\\_Finite\\_Difference\\_Navier-Stokes\\_solver/links/54ebb5ad0cf2a03051949209/Spatial-Coupling-of-a-Lattice-Boltzmann-fluid-model-with-a-Finite-Difference-Navier-Stokes-solver.pdf?origin=publication\\_detail](https://www.researchgate.net/profile/Paul-Albuquerque/publication/2174566_Spatial_Coupling_of_a_Lattice_Boltzmann_fluid_model_with_a_Finite_Difference_Navier-Stokes_solver/links/54ebb5ad0cf2a03051949209/Spatial-Coupling-of-a-Lattice-Boltzmann-fluid-model-with-a-Finite-Difference-Navier-Stokes-solver.pdf?origin=publication_detail)
- [11] Li, Y., LeBoeuf, E. J., & Basu, P. K. (2004). Least-squares finite-element lattice Boltzmann method. *Physical Review E*, 69(6), 065701-065704. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.69.065701>
- [12] Li, W., & Luo, L.-S. (2016). Finite Volume Lattice Boltzmann Method for Nearly Incompressible Flows on Arbitrary Unstructured Meshes. *Communications in Computational Physics*, 20(2), 301-324. <https://doi.org/10.4208/cicp.211015.040316a>

- [13] Zarghami, A., & Ahmadi, N. (2014). A Stable Lattice Boltzmann Method for Steady Backward-Facing Step Flow. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 39(8), 6375-6384. <https://doi.org/10.1007/s13369-014-1241-1>
- [14] Li, W., Kaneda, M., & Suga, K. (2013, June 3-6). A stable, low diffusion up-wind scheme for unstructured finite volume lattice Boltzmann method. Proceedings of The 4th Asian Symposium on Computational Heat Transfer and Fluid Flow, Hong Kong. [https://www.researchgate.net/profile/Weidong-Li-9/publication/261721140\\_A\\_Stable\\_Low\\_Diffusion\\_Up-wind\\_Scheme\\_for\\_Unstructured\\_Finite\\_Volume\\_Lattice\\_Boltzmann\\_Method/links/0c9605354e70883afd000000/A-Stable-Low-Diffusion-Up-wind-Scheme-for-Unstructured-Finite-Volume-Lattice-Boltzmann-Method.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Weidong-Li-9/publication/261721140_A_Stable_Low_Diffusion_Up-wind_Scheme_for_Unstructured_Finite_Volume_Lattice_Boltzmann_Method/links/0c9605354e70883afd000000/A-Stable-Low-Diffusion-Up-wind-Scheme-for-Unstructured-Finite-Volume-Lattice-Boltzmann-Method.pdf)
- [15] Ahrar, A. J., & Djavareshkian, M. H. (2017). Novel hybrid lattice Boltzmann technique with TVD characteristics for simulation of heat transfer and entropy generations of MHD and natural convection in a cavity. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 72(6), 431-449. <https://doi.org/10.1080/10407790.2017.1409528>
- [16] Roe, P. L. (1985, 27June-8July ). *Some contributions to the modelling of discontinuous flows*. The Fifteenth Summer Seminar on Applied Mathematics, La Jolla, California. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1985ams.conf..163R>
- [17] Aslan, E., Taymaz, I., & Benim, A. (2014). Investigation of the lattice Boltzmann SRT and MRT stability for lid driven cavity flow. *International Journal of Materials, Mechanics and Manufacturing*, 2(4), 317-324. <http://www.ijmmm.org/papers/149-TT3003.pdf>
- [18] Ahrar, A. J., & Djavareshkian, M. H. (2017). Computational investigation of heat transfer and entropy generation rates of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> nanofluid with Buongiorno's model and using a novel TVD hybrid LB method. *Journal of Molecular Liquids*, 242(1), 24-39. <https://doi.org/10.1016/j.molliq.2017.06.125>
- [19] Ahrar, A. J., Djavareshkian, M. H., & Ahrar, A. R. (2019). Numerical simulation of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-water nanofluid heat transfer and entropy generation in a cavity using a novel TVD hybrid LB method under the influence of an external magnetic field source. *Thermal Science and Engineering Progress*, 14(3805), 100416. <https://doi.org/10.1016/j.tsep.2019.100416>
- [20] Buongiorno, J. (2005). Convective Transport in Nanofluids. *Journal of Heat Transfer*, 128(3), 240-250. <https://doi.org/10.1115/1.2150834>
- [21] Succi, S. (2001). *The lattice Boltzmann equation: for fluid dynamics and beyond*. Oxford university press. [https://books.google.com/books?hl=en&lr=&id=OCOSj\\_xgnhAC&oi=fnd&pg=PA3&dq=The+lattice+Boltzmann+equation:+for+fluid+dynamics+and+beyond&ots=1MQ3JyUHVd&sig=aVGzn6oERvWr3fIznt6ldoGt7zs#v=onepage&q=The%20lattice%20Boltzmann%20equation%3A%20for%20fluid%20dynamics%20and%20beyond&f=false](https://books.google.com/books?hl=en&lr=&id=OCOSj_xgnhAC&oi=fnd&pg=PA3&dq=The+lattice+Boltzmann+equation:+for+fluid+dynamics+and+beyond&ots=1MQ3JyUHVd&sig=aVGzn6oERvWr3fIznt6ldoGt7zs#v=onepage&q=The%20lattice%20Boltzmann%20equation%3A%20for%20fluid%20dynamics%20and%20beyond&f=false)
- [22] Lenin, R., Joy, P. A., & Bera, C. (2021). A review of the recent progress on thermal conductivity of nanofluid. *Journal of Molecular Liquids*, 338, 116929. <https://doi.org/10.1016/j.molliq.2021.116929>
- [23] Porgar, S., Vafajoo, L., Nikkam, N., & Vakili-Nezhaad, G. (2021). A comprehensive investigation in determination of nanofluids thermophysical properties. *Journal of the Indian Chemical Society*, 98(3), 100037. <https://doi.org/10.1016/j.jics.2021.100037>
- [24] Ahrar, A. J., & Djavareshkian, M. H. (2016). Lattice Boltzmann simulation of a Cu-water nanofluid filled cavity in order to investigate the influence of volume fraction and magnetic field specifications on flow and heat transfer. *Journal of Molecular Liquids*, 215, 328-338. <https://doi.org/10.1016/j.molliq.2015.11.044>

- [25] Corcione, M. (2011). Empirical correlating equations for predicting the effective thermal conductivity and dynamic viscosity of nanofluids. *Energy Conversion and Management*, 52(1), 789-793. <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2010.06.072>
- [26] Fadaei, F., Molaei Dehkordi, A., Shahrokhi, M., & Abbasi, Z. (2017). Convective-heat transfer of magnetic-sensitive nanofluids in the presence of rotating magnetic field. *Applied Thermal Engineering*, 116, 329-343. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2017.01.072>
- [27] Park, H. K., Ha, M. Y., Yoon, H. S., Park, Y. G., & Son, C. (2013). A numerical study on natural convection in an inclined square enclosure with a circular cylinder. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 66, 295-314. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.07.029>
- [28] Kefayati, G. R. (2015). FDLBM simulation of entropy generation in double diffusive natural convection of power-law fluids in an enclosure with Soret and Dufour effects. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 89, 267-290. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.05.058>
- [29] Khanafer, K., Vafai, K., & Lightstone, M. (2003). Buoyancy-driven heat transfer enhancement in a two-dimensional enclosure utilizing nanofluids. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46(19), 3639-3653. [https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(03\)00156-X](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(03)00156-X)
- [30] Jahanshahi, M., Hosseinizadeh, S. F., Alipanah, M., Dehghani, A., & Vakilinejad, G. R. (2010). Numerical simulation of free convection based on experimental measured conductivity in a square cavity using Water/SiO<sub>2</sub> nanofluid. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 37(6), 687-694. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2010.03.010>