



Finite Groups with Non-commuting Graphs

Kayvan Moradipour^{1*}, Sanaz Asadirahmati²

¹Assistant Professor, Department of Mathematics, Technical and Vocational University (TVU), Tehran, Iran.

²PhD, Department of Mathematics, Technical and Vocational University (TVU), Tehran, Iran.

ARTICLE INFO

ABSTRACT

Article Type:

Original Research

Received: 06.24.2021

Revised: 09.23.2021

Accepted: 10.03.2021

Keyword:

Non-commuting Graphs
Conjugacy Vector Type
Graph Isomorphism
Power Prime Order
Metacyclic

*Corresponding Author:

Kayvan Moradipour

Email: kayvanmrp@yahoo.com

Group G is called metacyclic if it contains a normal cyclic subgroup N such that the quotient group G/N is also cyclic. In this paper, two conjectures proposed by Abdollahi et al. (2006) for a family of finite non-abelian metacyclic prime power groups G were investigated. For this purpose, first, the metacyclic p -groups were categorized into three Types (families) of the non-isomorphic groups. Next, by using the size of centralizers and also equality of the conjugacy vector type $\text{ctv}(G)$ of these groups, the necessary and sufficient conditions under which two non-abelian finite metacyclic prime power groups have the isomorphic non-commuting graphs were determined. The first conjecture of Abdollahi et al. for the three families of the classified groups was proven to be true. Likewise, the second conjecture held for some restrictions on the parameters of group G . Finally, it was demonstrated that there were non-isomorphic p -groups with the same non-commuting graphs.



EXTENDED ABSTRACT

Introduction

In the recent years, investigating algebraic properties of graphs corresponding to groups and rings has become an attractive research. Suppose G is a nonabelian group, the non-commuting graph Γ_G of the group G is defined as the graph, whose vertex set is $G \setminus Z(G)$ and two distinct vertices x, y are connected by an edge if and only if $xy \neq yx$. The idea of non-commutative graphs is derived from the old question of Erdos on the size of graph clicks, which was answered positively by Neumann. Recently, this topic has been studied by many researchers. Abdollahi et al. have given the general properties of these graphs and proposed the following two conjectures.

- **Conjecture 1:** If H and K are two finite non-abelian groups and $\Gamma_G \simeq \Gamma_K$, then $|H| = |K|$.
- **Conjecture 2:** If H and K are two finite non-abelian groups and K is simple such that $\Gamma_G \simeq \Gamma_K$, then $H \simeq K$.

Although the answer to the above conjectures is generally negative, they are true for some classes of groups. In this regard, Abdollahi et al. have given a positive answer to Conjecture 1 for various classes of groups. On the other hand, Abdollahi and Shahvardi also showed that when H and K are two nilpotent groups with non-commutative irregular graphs, then conjecture 1 is true. Moreover, Darfeshah proved that if H or K is a non-abelian finite simple group, then conjecture 1 holds. Likewise, if H or K is a finite non-abelian group such that satisfies the Thomson's conjecture, then conjecture 2 is true. Abdollahi and Shahvardi also showed that if H or K is an alternating group, then Conjecture 2 is true. On the other hand, Derfeshah and Yousefzadeh proved that if one of the groups H or K is symmetric, then conjecture 2 is true. In addition, Zhang and Shai showed that Conjecture 2 is true when it is isomorphic to the simple group $L_4(9)$. Recently, Solomon and Walder proved that if H or K is a finite simple non-abelian group, then both conjectures are true.

A group is called metacyclic if it contains a normal cyclic subgroup such that the quotient group is also cyclic. In this paper, two conjectures proposed by Abdollahi et al. for a family of finite non-abelian metacyclic prime power groups were investigated. The metacyclic groups were categorized into three types of the non-isomorphic groups. Next, by using the size of centralizers and also equality of the conjugacy vector type $ctv(G)$ of these groups, necessary and sufficient conditions under which two non-abelian finite metacyclic prime power groups have the isomorphic non-commuting graphs were determined. The present research proved that the first conjecture of Abdollahi et al. for the three families of the classified groups is true. Likewise, the second conjecture held for some restrictions on the parameters of the groups. Finally, it was shown that there are non-isomorphic groups with the same non-commuting graphs. In this paper, two conjectures proposed by Abdollahi et al. for a family of finite non-abelian metacyclic prime power groups were investigated.

Methodology

A group is called metacyclic if it contains a normal cyclic subgroup such that the quotient group is also cyclic. The metacyclic groups were categorized into three types of the non-

isomorphic groups. Next, by using the size of centralizers and also equality of the conjugacy vector type $\text{ctv}(G)$ of these groups, the necessary and sufficient conditions under which two non-abelian finite metacyclic prime power groups have the isomorphic non-commuting graphs were determined. It was also proven that the first conjecture of Abdollahi et al. for the three families of the classified groups is true. Likewise, the second conjecture held for some restrictions on the parameters of the groups. Finally, it was demonstrated that there are non-isomorphic groups with the same non commuting graphs.

First, a class of finite p -groups which is called metacyclic groups was introduced as follows:

$$G = \langle a, b \mid a^{p^m} = 1, b^{p^n} = a^k, bab^{-1} = a^r \rangle, \quad (A)$$

where, $p^m \mid r^{p^n} - 1$, $p^m \mid k(r - 1)$, $0 < r, k \leq p^m$ and $m, n \geq 0$.

Beuerle's classifications were divided into three different classes of finite p -group as Types 1, 2 and 3 as below.

Type 1. If $\beta \geq \gamma \geq 1$ and p is an odd prime or $\alpha - \gamma \geq 2$, we have

$$G = G(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon) \cong \langle a, b : a^{p^\alpha} = 1, b^{p^\beta} = a^{p^{\alpha-\varepsilon}}, a^b = a^{p^{\alpha-\gamma-1}} \rangle, \quad (1)$$

for some $\alpha, \beta, \varepsilon, \gamma$.

Type 2. For $\alpha \geq 2$

$$G = G(\alpha, \beta, 0, \varepsilon) \cong \langle a, b : a^{2^\alpha} = 1, b^{2^\beta} = a^{2^{\alpha-\varepsilon}}, a^b = a^{-1} \rangle. \quad (2)$$

Type 3. For $\gamma > 0$ and $\alpha - \gamma \geq 2$

$$G = G(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon) \cong \langle a, b : a^{2^\alpha} = 1, b^{2^\beta} = a^{2^{\alpha-\varepsilon}}, a^b = a^{2^{\alpha-\gamma-1}} \rangle. \quad (3)$$

These groups were studied by their centralizers. The notation $[b, a] = bab^{-1}a^{-1} = a^b a^{-1} = a^{\lambda-1}$ is the commutator of elements a and b . The element a is conjugate to b in G , if there exists an element $g \in G$ such $g^{-1}ag = a^g = b$.

The type of a metacyclic p -group G is denoted by $\text{Type}(G)$ and the notation $D(\Gamma_G)$ is used to show the set of all degrees of vertices of the graph and $\text{CTV}(G)$ represents the set of all conjugacy class sizes of G .

Results and discussion

Necessary and sufficient conditions were given for two prime power metacyclic groups to have isomorphic non-commuting graphs. It was proven that if H and K are two groups with the same orders and $\Gamma_H \cong \Gamma_K$, then $\text{ctv}(H) = \text{ctv}(K)$. It was supposed that $H = H(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ is a non-abelian metacyclic p -group and $K = K(\alpha', \beta', \gamma', \varepsilon')$ is a non-abelian metacyclic q -group. Thus, if $|Z(H)| = |Z(K)|$ and $|H| = |K|$, then $\Gamma_H \cong \Gamma_K$. The

main result showed the investigation of the necessary and sufficient conditions under which two non-abelian metacyclic p -groups have isomorphic non-commuting graphs. This result is stated below:

For to non-commuting graphs Γ_H and Γ_K we have $\Gamma_H \cong \Gamma_K$ if and only if one of the following holds:

- (1) if $\text{Type}(H) = \text{Type}(K) = 1$, then $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$ and $\gamma = \gamma'$.
- (2) if $\text{Type}(H) = \text{Type}(K) = 2$, then $\alpha = \alpha'$ and $\beta = \beta'$.
- (3) if $\text{Type}(H) = \text{Type}(K) = 3$, then $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ and $\gamma = \gamma'$.
- (4) if $\text{Type}(H) = 1$ and $\text{Type}(K) = 2$, then $\gamma = 1$, $\alpha' = 2$ and $\beta' = \alpha + \beta - 2$.
- (5) if $\text{Type}(H) = 2$ and $\text{Type}(K) = 3$, then $\alpha = \alpha' \geq 3$, $\beta = \beta'$ and $\gamma' = 1$.

Conclusion

It was proved that if the non-commuting graph Γ_H of the on-abelian metacyclic p -group H and the non-commuting graph Γ_K of the on-abelian metacyclic q -group K are isomorphic, then H and K have the same orders and centers. It was also proved that the conjecture 1 proposed by Abdollahi et al. holds for two prime power metacyclic groups. It stated the necessary and sufficient conditions under which two non-abelian metacyclic p -groups have isomorphic non-commuting graphs. In addition, it was shown that there are non-isomorphic metacyclic p -group with isomorphic non-commuting graphs.



گروه‌های متناهی با گراف‌های ناجابه‌جایی یکریخت

کیوان مرادی‌پور^{*۱}، ساناز اسدی رحمتی^۲

۱- استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه فنی و حرفه‌ای، تهران، ایران.

۲- دکتری، گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه فنی و حرفه‌ای، تهران، ایران.

اطلاعات مقاله

چکیده

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۰۴/۰۳

بازنگری مقاله: ۱۴۰۰/۰۷/۰۱

پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۷/۱۱

کلید واژگان:

گراف ناجابه‌جایی

بردار نوع مزدوج

گراف‌های یکریخت

توان مرتبه اول

متادوری

گروه متادوری است هرگاه شامل یک زیرگروه دوری و نرمال N باشد به طوری که گروه خارج قسمتی G/N نیز دوری باشد. در این مقاله، دو حدس مطرح شده توسط عبدالهی و همکاران (۲۰۰۶) را برای خانواده‌ای از گروه‌های متناهی و نآبلی متادوری G با مرتبه توان اول مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای این منظور، ابتدا این گروه‌ها را به سه نوع (خانواده) از گروه‌های نایکریخت دسته‌بندی می‌کنیم، سپس با استفاده از اندازه مرکز سازه‌های این گروه‌ها و همین‌طور خاصیت تساوی بردارهای نوع مزدوج آنها، شرایط لازم و کافی را به دست می‌آوریم که تحت آن شرایط، گروه‌های دسته بندی شده دارای گراف‌های ناجابه‌جایی یکریخت باشند. در انتها، ثابت می‌کنیم حدس اول عبدالهی و همکاران برای دو گروه متادوری از توان مرتبه اول برقرار است. همین‌طور حدس دوم نیز با اعمال محدودیت‌هایی روی پارامترهای گروه‌های رده بندی شده درست است. در پایان نتیجه می‌گیریم p -گروه‌های غیر همسان با گراف‌های ناجابه‌جایی یکریخت وجود دارند.

* نویسنده مسئول: کیوان مرادی‌پور

پست الکترونیکی:

kayvanmrp@yahoo.com



مقدمه

در سال‌های اخیر، بررسی خواص جبری گراف‌های متناظر با گروه‌ها و حلقه‌ها به تحقیقات جذاب این حوزه تبدیل شده است [۱]، [۲]، [۳]، [۴]، [۵]، [۶]، [۷] و [۸]. فرض می‌کنیم G یک گروه ناآبلی باشد، گراف ناجابه‌جایی G که با Γ_G نمایش داده می‌شود گرافی است با مجموعه رئوس $G \setminus Z(G)$ و دو رأس x و y آن مجاورند اگر $xy \neq yx$. ایده گراف‌های ناجابه‌جایی از سؤال قدیمی اردوش روی اندازه خوشه‌های گراف مطرح‌شده است که آن سؤال توسط [۹] پاسخ مثبت داده شد. این موضوع اخیراً توسط خیلی از محققین مورد مطالعه قرار گرفته شده است. [۷] خواص عمومی این گراف‌ها را مطالعه و حدس‌های زیر را مطرح کرده‌اند.

– حدس ۱: اگر H و K دو گروه ناآبلی متناهی باشند که $\Gamma_H \cong \Gamma_K$ ، آنگاه $|H| = |K|$.

– حدس ۲: اگر H و K دو گروه ناآبلی متناهی و K ساده باشد به طوری که $\Gamma_H \cong \Gamma_K$ ، آنگاه $H \cong K$.

گرچه جواب حدس‌های فوق در حالت کلی منفی است، اما برای رده‌های مختلفی از گروه‌ها صدق می‌کنند. [۷] جواب مثبتی به حدس ۱ برای رده‌های متنوعی از گروه‌ها داده‌اند. هم‌چنین، [۱۰] نشان می‌دهند که هرگاه H و K دو گروه پوچ‌توان با گراف‌های ناجابه‌جایی نامنظم باشند، آنگاه حدس ۱ درست است ([۱۱]، [۸] نشان می‌دهد که اگر H یا K گروهی ناآبلی، متناهی و ساده باشد، در این صورت حدس ۱ برقرار است. همین‌طور هرگاه H یا K گروه ناآبلی متناهی باشد که در حدس تامسون [۱۲] صدق کنند، آنگاه حدس ۲ درست است. [۱۰] هم‌چنین نشان دادند اگر H یا K یک گروه متناوب باشد، آنگاه حدس ۲ درست است. از طرفی، [۱۳] اثبات کردند که اگر یکی از گروه‌های H یا K متقارن باشد، آنگاه حدس ۲ درست است. از طرفی، [۱۴] نشان دادند که حدس ۲ هم‌چنین درست است وقتی که H یا K با گروه ساده $L_4(9)$ یا چند گروه دیگر یکریخت باشد. اخیراً [۱۵] ثابت کرده‌اند اگر H یا K گروه ناآبلی ساده متناهی باشند، آنگاه هر دو حدس درست هستند. برای دیدن نتایج بیشتر به مطالعات [۷]، [۱۶] و [۱۷] مراجعه کنید. در این مقاله، حدس‌های مطرح‌شده را برای خانواده گروه‌های متناهی متادوری از مرتبه توان اول بررسی می‌کنیم. همین‌طور شرایط لازم و کافی برای یکریخت بودن گراف‌های ناجابه‌جایی وابسته به این گروه‌ها را به دست می‌آوریم. تا انتهای بحث، از دسته‌بندی p -گروه‌های متادوری که توسط [۱۸] صورت گرفته است استفاده می‌کنیم.

مفاهیم و نتایج مقدماتی

تعریف ۱.۲: گروه G را متادوری می‌نامند هرگاه شامل یک زیرگروه نرمال دوری مانند N باشد به طوری که گروه خارج قسمتی G/N نیز دوری باشد.

تعریف ۲.۲: فرض کنید $a, b \in G$ باشد. عضو a مزدوج b است هرگاه عنصری مانند g از گروه G وجود داشته باشد به طوری که $g^{-1}ag = a^g = b$.

یک p -گروه متادوری G معمولاً به صورت زیر نمایش داده می‌شود [۱۹]:

$$G = \langle a, b \mid a^{p^m} = 1, b^{p^n} = a^k, bab^{-1} = a^r \rangle$$

که در آن: $0 < r, k \leq p^m$ ، $m, n \geq 0$.

برل (۲۰۰۵) رده‌بندی از همه p -گروه‌های متناهی متادوری انجام داده است که در اینجا آنها را به سه دسته زیر تقسیم می‌کنیم. به راحتی می‌توان نشان داد این سه حالت همه گروه‌های رده‌بندی شده برل را پوشش می‌دهند. در واقع، اگر G یک p -گروه متادوری باشد، آنگاه دسته‌بندی برل می‌تواند در یکی از سه نوع (Type) زیر قرار گیرد به شرطی که در \mathbb{N} و $\alpha, \beta \geq 0$ اعداد صحیح در نظر گرفته شوند.

نوع ۱: برای بعضی از $\alpha, \beta, \varepsilon, \gamma$ به شرطی که $\beta \geq \gamma \geq 1$ و p یک عدد اول فرد یا $\alpha - \gamma \geq 2$ باشد، داریم:

$$G = G(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$$

$$\cong \langle a, b : a^{p^\alpha} = 1, b^{p^\beta} = a^{p^{\alpha-\varepsilon}}, a^b = a^{p^{\alpha-\gamma-1}} \rangle \quad (1)$$

نوع ۲: وقتی $\alpha \geq 2$ ، داریم:

$$G = G(\alpha, \beta, \cdot, \varepsilon)$$

$$\cong \langle a, b : a^{p^\alpha} = 1, b^{p^\beta} = a^{p^{\alpha-\varepsilon}}, a^b = a^{-1} \rangle \quad (2)$$

نوع ۳: وقتی $\alpha - \gamma \geq 2$ و $\gamma > 0$ ، داریم:

$$G = G(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$$

$$\cong \langle a, b : a^{p^\alpha} = 1, b^{p^\beta} = a^{p^{\alpha-\varepsilon}}, a^b = a^{p^{\alpha-\gamma-1}} \rangle. \quad (3)$$

این گروه‌ها از طریق مرکز سازهای آنها مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته‌اند که در سه گزاره زیر خلاصه می‌شوند [۲۰].

تعریف ۳.۲: زیرگروه $C_G(g) = \{x \in G : xg = gx\}$ ، که در آن $g \in G$ است را مرکز ساز g در G می‌نامند.

گزاره ۱.۲: فرض کنید $G = G(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ یک گروه از نوع ۱ باشد. در این صورت، $|Z(G)| = |G| = p^{\alpha+\beta}$ و $|C_G(g)| = p^{\alpha+\beta-2\gamma}$ هم‌چنین اگر $g = a^i b^j \in G$ آنگاه:

$$|C_G(g)| = p^{\alpha+\beta-2\gamma+\min\{e_p(i)+e_p(j)\}}$$

که در آن $e_p(i)$ نمایش بزرگ‌ترین نمای p در i است.

گزاره ۲.۲: فرض کنید $G = G(\alpha, \beta, 0, \varepsilon)$ یک گروه از نوع ۲ باشد، در این صورت، $|Z(G)| = |G| = 2^{\alpha+\beta}$ و $|C_G(g)| = 2^\beta$ همین‌طور اگر $g = a^i b^j \in G$ آنگاه:

$$|C_G(g)| = \begin{cases} 2^{\alpha+\beta}, & a^i b^j \in Z(G) \\ 2^{\alpha+\beta-1}, & a^i b^j \notin Z(G), j = 2k \\ 2^{\beta+1}, & a^i b^j \notin Z(G), j = 2k + 1 \end{cases}$$

که در آن $k \in \mathbb{Z}$

گزاره ۳.۲: اگر $G = G(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ یک گروه از نوع ۳ باشد، آنگاه $|Z(G)| = 2^{\beta-\gamma+1}$ و $|G| = 2^{\alpha+\beta}$

همین‌طور برای هر عضو $g = a^i b^j \in G$ داریم:

$$|C_G(g)| = \begin{cases} 2^{\alpha+\beta-\gamma+e_2(i)}, & j = 2k, e_2(j) \geq \gamma, e_2(i) < \gamma \\ 2^{\alpha+\beta-\gamma+e_2(j)}, & j = 2k, e_2(i) \geq \alpha - 1 \text{ or} \\ & e_2(i) - e_2(j) \geq \alpha - \gamma - 1, e_2(i) \geq \gamma \\ 2^{\alpha+\beta-\gamma+e_2(j)-1}, & j = 2k, e_2(i) \geq \gamma, e_2(i) < \alpha - 1, \\ & e_2(i) - e_2(j) < \alpha - \gamma - 1 \\ 2^{\alpha+\beta-\gamma+e_2(j)}, & j = 2k, e_2(i) \leq e_2(j), \\ & e_2(i) - e_2(j) \geq \alpha - \gamma - 1 \\ 2^{\alpha+\beta-\gamma+e_2(j)-1}, & j = 2k, e_2(i) \leq e_2(j) < \gamma, \\ & e_2(i) - e_2(j) < \alpha - \gamma - 1, \\ 2^{\alpha+\beta-\gamma+e_2(j)}, & j = 2k, e_2(i) < e_2(j) < \gamma \\ 2^{\beta+1}, & j = 2k + 1, \end{cases}$$

که در آن $k \in \mathbb{Z}$.

در آنچه پیش رو خواهیم داشت منظور از گروه p -گروه متناهی نا آبلی متادوری است. همین طور نوع هر p -گروه متادوری را با نماد $\text{Type}(G)$ نمایش داده و از نماد $D(\Gamma_G)$ برای نمایش مجموعه همه درجه‌های رأس‌های یک گراف Γ_G استفاده می‌شود.

تعریف ۴.۲: گراف ناجابه‌جایی یک گروه G که با نماد Γ_G نشان داده می‌شود، گرافی است با مجموعه رؤس $G \setminus Z(G)$ و دو رأس مجزای x و y از Γ_G مجاورند هرگاه $xy \neq yx$.

مثال ۱.۲: در ۲-گروه $G = D_{\gamma, \alpha+1} = \langle a, b : a^{\gamma^\alpha} = 1, b^2 = 1, a^b = a^{-1} \rangle$ ؛ تعداد اعضای گروه برابر است با $|G| = 2^{\alpha+1}$. هم‌چنین مرکز آن عبارت است از $Z(G) = \langle a^{2^{\alpha-1}}, b^2 \rangle$ که در آن $|Z(G)| = 2$. تعداد رأس‌های گراف ناجابه‌جایی Γ_G برابر است با $|V(\Gamma_G)| = 2^{\alpha+1} - 2$. همین طور، این گراف دارای $|E(\Gamma_G)| = 2^\alpha(2^{\alpha+1} - 2)$ یال می‌باشد. در حالت خاص $\alpha = 2$ ، گراف ناجابه‌جایی ۲-گروه متادوری D_8 که در آن $Z(D_8) = \{e, a^2\}$ دارای ۶ رأس و ۱۲ یال است.

نتایج اصلی

در این بخش، شرایط لازم و کافی را برای آن که دو گروه متادوری توان اول دارای گراف‌های ناجابه‌جایی یکریختی باشند بیان می‌کنیم.

اگر G یک گروه باشد، آنگاه مجموعه همه اندازه‌های رده مزدوج G را با $\text{ctv}(G)$ نمایش داده و بردار نوع مزدوج نامیده می‌شود. در اینجا ابتدا لم زیر را که برای اثبات قضیه 2.3 مورد استفاده قرار می‌گیرد اثبات می‌کنیم.

لم ۱.۳: اگر H و K دو گروه هم‌مرتبه باشند و $\Gamma_H \cong \Gamma_K$ ، آنگاه $\text{ctv}(H) = \text{ctv}(K)$.

اثبات. فرض می‌کنیم $\theta: V(\Gamma_H) \rightarrow V(\Gamma_K)$ یک تناظر یک‌به‌یک از رأس‌های دو گراف Γ_H و Γ_K و برای هر $h \in V(\Gamma_H)$ در نظر می‌گیریم h^H رده هم ارزی h در H باشد. فرض می‌کنیم $\theta(h) = k$ باشد به طوری که $\text{deg}_{\Gamma_H}(h) = \text{deg}_{\Gamma_K}(k)$ ، در این صورت $|C_H(h)| = |C_K(k)|$. چون $|H| = |K|$ ، داریم:

$$\begin{aligned} |h^H| &= |H : C_H(h)| = |H| / |C_H(h)| \\ &= |K| / |C_K(k)| = |K : C_K(k)| = |k^K|, \end{aligned}$$

یعنی اندازه‌های رده مزدوج دو گروه H و K برابر هستند.

قضیه زیر نشان می‌دهد که حدس ۱ برای خانواده‌ای از گروه‌های توان اول متادوری نا آلی برقرار است.

در تمامی این بخش فرض می‌کنیم $H = H(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ یک p -گروه متادوری و $K = K(\alpha', \beta', \gamma', \varepsilon')$ یک q -گروه غیر آلی متادوری باشد.

قضیه ۱.۳: اگر $\Gamma_H \cong \Gamma_K$ ، آنگاه $|H| = |K|$ و $|Z(H)| = |Z(K)|$.

اثبات. فرض کنید $\theta: \Gamma_H \rightarrow \Gamma_K$ یک یکریختی از Γ_H به Γ_K باشد. بدون این‌که از کلیت موضوع کم شود فرض می‌کنیم که نوع H کمتر یا مساوی با نوع K باشد. حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

(۱) فرض کنیم $\text{Type}(H) = \text{Type}(K) = 1$ همین‌طور $h_1, h_2 \in H \setminus Z(H)$ به‌طوری‌که:

$$\deg_{\Gamma_H}(h_1) = \min D(\Gamma_H)$$

و $\deg_{\Gamma_H}(h_2) = \min D(\Gamma_H) \setminus \{\deg_{\Gamma_H}(h_1)\}$ ، اگر برای مقادیر $i = 1, 2$ داشته باشیم $k_i = \theta(h_i)$ ، آنگاه:

$$\deg_{\Gamma_K}(k_1) = \min D(\Gamma_K)$$

و $\deg_{\Gamma_K}(k_2) = \min D(\Gamma_K) \setminus \{\deg_{\Gamma_K}(k_1)\}$ ، چون $\deg_{\Gamma_H}(h_i) = \deg_{\Gamma_K}(k_i)$ ، از اینجا و با استفاده از گزاره 1.2 نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} p^{\alpha+\beta} - p^{\alpha+\beta-1} &= q^{\alpha'+\beta'} - q^{\alpha'+\beta'-1} \\ p^{\alpha+\beta} - p^{\alpha+\beta-2} &= q^{\alpha'+\beta'} - q^{\alpha'+\beta'-2} \end{aligned}$$

با تقسیم دو طرف معادله اول بر طرفین معادله دوم، به تساوی $p/(p+1) = q/(q+1)$ می‌رسیم. از اینجا به

دست می‌آوریم $p = q$ ؛ بنابراین $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$ و در نتیجه $|H| = |K|$.

(۲) فرض کنیم $\text{Type}(H)$ و $\text{Type}(K)$ برابر ۲ یا ۳ باشد. در نظر بگیرید $h \in H \setminus Z(H)$ به‌طوری‌که $\deg_{\Gamma_H}(h) = \min D(\Gamma_H)$ ، اگر $k = \theta(h)$ ، آنگاه

$$\deg_{\Gamma_K}(k) = \min D(\Gamma_K).$$

چون $\deg_{\Gamma_H}(h) = \deg_{\Gamma_K}(k)$ ، با استفاده از گزاره‌های ۲.۲ و ۲.۳ داریم:

$$2^{\alpha+\beta} - 2^{\alpha+\beta-1} = 2^{\alpha'+\beta'} - 2^{\alpha'+\beta'-1},$$

که از اینجا نتیجه می‌گیریم $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$ ؛ بنابراین $|H| = |K|$.

(۳) فرض کنید $\text{Type}(H) = 1$ و $\text{Type}(K) = 2$. فرض کنید k_1, k_2, h_1, h_2 اعضای به صورت حالت (۱) باشند. چون $\text{deg}_{\Gamma_H}(h_i) = \text{deg}_{\Gamma_K}(k_i)$ گزاره‌های 2.1 و 2.2 نشان می‌دهند که:

$$p^{\alpha+\beta} - p^{\alpha+\beta-1} = 2^{\alpha'+\beta'} - 2^{\alpha'+\beta'-1}$$

$$p^{\alpha+\beta} - p^{\alpha+\beta-2} = 2^{\alpha'+\beta'} - 2^{\beta'+1}$$

بنابراین $p/(p+1) = 2^{\alpha'-2}/(2^{\alpha'-1} - 1)$ که از اینجا مقادیر $p = 2$ و $\alpha' = 3$ به دست می‌آیند. در نتیجه خواهیم داشت: $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$ ؛ بنابراین $|H| = |K|$.

(۴) فرض کنید $\text{Type}(H) = 1$ و $\text{Type}(K) = 3$ ؛ مانند حالت (۱) داریم $|H| = |K|$.

اکنون در شرایطی قرار داریم که حدس ۲ را مورد بررسی قرار دهیم. قضیه زیر شرایط لازم و کافی را ارائه می‌دهد که تحت این شرایط دو گروه متادوری نا اَبلی با توان اول دارای گراف‌های ناجابه‌جایی یکریخت باشند.

قضیه ۳.۲: $\Gamma_H \cong \Gamma_K$ اگر و فقط اگر یکی از حالات زیر برقرار باشد.

- اگر $\text{Type}(H) = \text{Type}(K) = 1$ آنگاه $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$ و $\gamma = \gamma'$
- اگر $\text{Type}(H) = \text{Type}(K) = 2$ آنگاه $\alpha = \alpha'$ و $\beta = \beta'$
- اگر $\text{Type}(H) = \text{Type}(K) = 3$ آنگاه $\alpha = \alpha'$ و $\beta = \beta'$ و $\gamma = \gamma'$
- اگر $\text{Type}(H) = 1$ ، $\text{Type}(K) = 2$ آنگاه $\alpha' = 2$ ، $\gamma = 1$ و $\beta' = \alpha + \beta - 2$
- اگر $\text{Type}(H) = 2$ ، $\text{Type}(K) = 3$ آنگاه $\alpha = \alpha' \geq 3$ و $\beta = \beta'$ و $\gamma = 1$

اثبات. با استفاده از قضیه ۳.۱ داریم: $|H| = |K|$ و $|Z(H)| = |Z(K)|$. حال فرض می‌کنیم:

$Z(H) \rightarrow Z(K)$: ξ یک نگاشت دوسویی باشد. حالات زیر را داریم:

(۱) فرض کنید $\text{Type}(H) = \text{Type}(K) = 1$. چون $|H| = |K|$ و $|Z(H)| = |Z(K)|$ داریم $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$ و $\gamma = \gamma'$. اگر $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$ و $\gamma = \gamma'$ در این صورت با استفاده از گزاره ۲.۱ نگاشت

$\theta: H \setminus Z(H) \rightarrow K \setminus Z(K)$ تعریف شده به صورت $\theta(a^i b^j z) = a^i b^j \xi(z)$ برای همه $0 \leq i, j \leq p^\gamma$ یک یکرختی بین Γ_K و Γ_H است.

(۲) فرض کنید که $\text{Type}(H) = \text{Type}(K) = 2$ باشد. از $|H| = |K|$ و $|Z(H)| = |Z(K)|$ نتیجه می‌شود

که: $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$ و $\beta = \beta'$ ؛ بنابراین، $\alpha = \alpha'$. اثبات عکس این حالت واضح است.

(۳) اگر $\text{Type}(H) = \text{Type}(K) = 2$ ، از تساوی‌های $|H| = |K|$ و $|Z(H)| = |Z(K)|$ داریم $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$ و $\beta - \gamma = \beta' - \gamma'$ از لم 3.1 داریم $\text{ctv}(H) = \text{ctv}(K)$ ، بنابراین بایستی داشته باشیم $\alpha = \alpha'$ که

از اینجا تساوی‌های $\beta = \beta'$ و $\gamma = \gamma'$ به دست می‌آیند. اثبات عکس این حالت بدیهی است.

(۴) فرض کنید $\text{Type}(H) = 1$ و $\text{Type}(K) = 2$. چون $|H| = |K|$ و $|Z(H)| = |Z(K)|$ پس داریم $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$ و $\beta = \alpha' + \beta'$ که نتیجه می‌دهد $\alpha' = 2\gamma$ از لم 3.1 داریم $\text{ctv}(H) = \text{ctv}(K)$ در نتیجه

$1 \leq \alpha' - 1 \leq 3$ یعنی $\alpha' \leq 3$ ؛ بنابراین وقتی که گروه H نا اَبلی باشد $\gamma = 1$ و $\alpha = 2$ پس $\gamma \neq 0$ برعکس، اگر $\gamma = 1$ ، $\alpha' = 2$ و $\beta' = \alpha + \beta - 2$ آنگاه:

$$H/Z(H) \cong K/Z(K) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

و به سادگی می‌توان نشان داد که برای همه $z \in Z(H)$ نگاشت:

$$\theta: H \setminus Z(H) \rightarrow K \setminus Z(K)$$

که اعضا abz, bz, az را به ترتیب به مقادیر $a'\xi(z), b'\xi(z)$ و $a'b'\xi(z)$ می‌نگارد یک یکریختی بین Γ_H و Γ_K به وجود می‌آورد.

(۵) حالت‌های $\text{Type}(K) = 3$ و $\text{Type}(H) = 2$ را در نظر بگیرید. از آنجایی که تساوی‌های $|H| = |K|$ و $|Z(H)| = |Z(K)|$ برقرار هستند، داریم $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$ و $\beta = \beta' - \gamma' + 1$ و همین‌طور از لم 3.1 داریم $\text{ctv}(H) = \text{ctv}(K)$ که از اینجا به دست می‌آوریم $\alpha - 1 \leq \min\{\gamma, \alpha - 1\} \leq \gamma$ پس $\gamma' \leq 1$. چون K نا آبله است $\gamma \neq 0$ به طوری که $\alpha \geq 3$ و $\gamma' = 1$ ؛ بنابراین $\beta = \beta'$ و در نتیجه $\alpha = \alpha'$. برعکس، اگر $\alpha = \alpha' \geq 3$ و $\beta = \beta'$ ، $\gamma' = 1$ و $\beta = \beta'$ ، $\gamma = 3$ در این صورت نگاشت:

$$\theta: H \setminus Z(H) \rightarrow K \setminus Z(K)$$

با تعریف $\theta(a^i b^j z) = a^i b^j \xi(z)$ برای همه $x = a^i b^j z \in H \setminus Z(H)$ یک یکریختی از Γ_H به Γ_K خواهد شد.

(۶) برای آخرین حالت، فرض کنید $\text{Type}(K) = 3$ و $\text{Type}(H) = 1$. چون $|H| = |K|$ و $|Z(H)| = |Z(K)|$ داریم $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$ و $\alpha + \beta - 2\gamma = \beta' - \gamma' + 1$ که از اینجا نتیجه می‌شود $\alpha' - 1 + \gamma' = 2\gamma$. همین‌طور از تساوی $\text{ctv}(H) = \text{ctv}(K)$ و لم ۳.۱ تساوی‌های $\gamma = \gamma' + 1$ و $\alpha' - 1 = \gamma'$ به دست می‌آیند. با توجه به روابط فوق تساوی $\gamma = \gamma'$ حاصل می‌شود که این یک تناقض است.

نتایج

اثبات شد که حدس ۱ مطرح‌شده در [۷] برای دو گروه متادوری از توان اول برقرار است. برای بررسی حدس ۲، شرایط لازم و کافی یکریختی دو گروه متادوری نا آبله با توان اول و یکریختی گراف‌های ناجابه‌جایی وابسته به آنها را معین کردیم. همچنین، نشان دادیم p -گروه‌های غیریکریخت با گراف‌های ناجابه‌جایی یکریخت وجود دارند.

References

- [1] Nikandish, R. (2021). Investigating the metric dimension of an intersection graph in a commutative ring. *Karafan Quarterly Scientific Journal*, 17(4), 35-44. <https://doi.org/10.48301/kssa.2021.128394>
- [2] Miraftab, B., & Nikandish, R. (2019). Co-maximal graphs of two generator groups. *Journal of Algebra and Its Applications*, 18(04), 1950068. <https://doi.org/10.1142/s0219498819500683>
- [3] Akbari, S., Miraftab, B., & Nikandish, R. (2017). Co-maximal Graphs of Subgroups of Groups. *Canadian Mathematical Bulletin*, 60(1), 12-25. <https://doi.org/10.4153/CMB-2016-026-0>
- [4] Shaveisi, F. (2017). The central vertices and radius of the regular graph of ideals. *Transactions on Combinatorics*, 6(4), 1-13. <https://doi.org/10.22108/toc.2017.21472>
- [5] Aalipour, G., Akbari, S., Cameron, P., Nikandish, R., & Shaveisi, F. (2016). On the Structure of the Power Graph and the Enhanced Power Graph of a Group. *Electronic Journal of Combinatorics*, 24(3). <https://doi.org/10.37236/6497>
- [6] Aalipour, G., Akbari, S., Nikandish, R., Nikmehr, M. J., & Shaveisi, F. (2012). On the coloring of the annihilating-ideal graph of a commutative ring. *Discrete Mathematics*, 312(17), 2620-2626. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2011.10.020>
- [7] Abdollahi, A., Akbari, S., & Maimani, H. R. (2006). Non-commuting graph of a group. *Journal of Algebra*, 298(2), 468-492. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2006.02.015>

- [8] Darafsheh, M. R. (2009). Groups with the same non-commuting graph. *Discrete Applied Mathematics*, 157(4), 833-837. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2008.06.010>
- [9] Neumann, B. H. (1976). A problem of Paul Erdős on groups. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 21(4), 467-472. <https://doi.org/10.1017/S1446788700019303>
- [10] Abdollahi, A., & Shahverdi, H. (2012). Characterization of the alternating group by its non-commuting graph. *Journal of Algebra*, 357(1), 203-207. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2012.01.038>
- [11] Abdollahi, A., & Shahverdi, H. (2014). Non-Commuting Graphs of Nilpotent Groups. *Communications in Algebra*, 42(9), 3944-3949. <https://doi.org/10.1080/00927872.2013.798414>
- [12] Ahanjideh, N. (2013). On the thompson's conjecture on conjugacy classes sizes. *International Journal of Algebra and Computation*, 23(01), 37-68. <https://doi.org/10.1142/s0218196712500774>
- [13] Darafsheh, M. R., & Yousefzadeh, P. (2013). Characterization of the symmetric group by its non-commuting graph. *International Journal of Group Theory*, 2(2), 47-72. <https://doi.org/10.22108/ijgt.2013.1920>
- [14] Zhang, L., & Shi, W. (2010). Recognition of some simple groups by their noncommuting graphs. *Monatshefte für Mathematik*, 160(2), 211-221. <https://doi.org/10.1007/s00605-009-0097-z>
- [15] Solomon, R. M., & Woldar, A. J. (2013). Simple groups are characterized by their non-commuting graphs. *Journal of Group Theory*, 16(6), 793-824. <https://doi.org/10.1515/jgt-2013-0021>
- [16] Abdollahi, A., Akbari, S., Dorbidi, H., & Shahverdi, H. (2013). Commutativity Pattern of Finite Non-Abelian p-Groups Determine Their Orders. *Communications in Algebra*, 41(2), 451-461. <https://doi.org/10.1080/00927872.2011.627075>
- [17] Darafsheh, M. R., & Yousefzadeh, P. (2012). Some results on characterization of finite group by non commuting graph. *Transactions on Combinatorics*, 1(2), 41-48. <https://doi.org/10.22108/toc.2012.1180>
- [18] Beuerle, J. R. (2005). An Elementary Classification of Finite Metacyclic p-Groups of Class at Least Three. *Algebra Colloquium*, 12(04), 553-562. <https://doi.org/10.1142/s1005386705000519>
- [19] King, B. W. (1973). Presentations of metacyclic groups. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 8(1), 103-131. <https://doi.org/10.1017/S0004972700045500>
- [20] Moradipour, K. (2018). Conjugacy Class Sizes and n-th Commutativity Degrees of Some Finite Groups. *Comptes rendus de l'academie bulgare des sciences*, 71(4), 453-459. <https://doi.org/10.7546/CRABS.2018.04.02>