



## A Spectral Parametric Iteration Method for Solving Volterra Population Model

Mahmood Parsamanesh<sup>1\*</sup>, Majid Erfanian<sup>2</sup>, Asghar Ghorbani<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Assistant Professor, Department of Mathematics, Technical and Vocational University (TVU), Tehran, Iran.

<sup>2</sup>Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Zabol, Zabol, Iran.

<sup>3</sup>Assistant Professor, Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran.

### ARTICLE INFO

### ABSTRACT

#### Article Type:

Original Research

**Received:** 06.02.2021

**Revised:** 08.30.2021

**Accepted:** 09.19.2021

#### Keyword:

Spectral Parametric Iteration Method  
Volterra's Population Model  
Chebyshev Spectral Collocation  
Stiff System

#### \*Corresponding Author:

Mahmood Parsamanesh

**Email:** [mparsamanesh@tvu.ac.ir](mailto:mparsamanesh@tvu.ac.ir)

Integral equations are widely used in various branches of mathematics and mathematical physics, and many problems of initial value and boundary value which are related to ordinary and partial differential equations can be converted to integral equations and then be solved. The explicit methods generally provide a good approximation of the answer to a stiff problem if there are too many node points. However, from the computational point of view, this is not acceptable nor cost-effective. Because it requires high computational costs and more time for evaluations, implicit methods are proposed, in which to obtain an approximate solution we must solve a nonlinear system of equations using the Jacobin method. In addition, by increasing the number of nodes and increasing the matrix dimension, examining convergence and stability is a serious problem. In this paper, a hybrid explicit method based on the parametric iteration method and the spectral collocation method was developed for simulating the solution of the nonlinear stiff Volterra's model for population growth of a species within a closed system. The method derived here has the advantage that it does not require the solution of nonlinear systems of equations encountered in the Jacobian evaluation. The results obtained in the present work demonstrate excellent performance of the developed method.



---

**EXTENDED ABSTRACT**

---

**Introduction**

Volterra’s model for population growth of a species within a closed system is given in [4, 5] as

$$\frac{dp}{dT} = ap - bp^2 - cp \int_0^T p(x)dx, \quad p(0) = p_0, \tag{1}$$

where  $a > 0$  is the birth rate coefficient,  $b > 0$  is the crowding coefficient, and  $c > 0$  is the toxicity coefficient. The coefficient  $c$  indicates the essential behavior of the population evolution before its level falls to zero in the long term.  $p_0$  is the initial population, and  $p = p(T)$  denotes the population at time  $T$ . This model is a first-order integro-ordinary differential equation where the term  $cp \int_0^T p(x)dx$  represents the effect of toxin accumulation on the species. Scale time and population were applied by introducing the nondimensional variables  $t = \frac{Tc}{b}$  and  $u = \frac{bp}{a}$  to obtain the nondimensional problem

$$\kappa \frac{du}{dt} = u - u^2 - u \int_0^t u(x)dx, \quad u(0) = u_0 \tag{2}$$

where  $u(t)$  is the scaled population of identical individuals at time  $t$ , and  $\kappa = c/(ab)$  is a prescribed nondimensional parameter. The only equilibrium solution of Eq. (2) is the trivial solution  $u(t) = 0$  and the analytical solution [6]

$$u(t) = u_0 \exp\left(\frac{1}{\kappa} \int_0^t \left[1 - u(\tau) - \int_0^\tau u(x)dx\right] d\tau\right),$$

shows that  $u(t) > 0$ . for all  $t$  if  $u_0 > 0$ .

**Methodology**

The parametric iteration method (PIM) provides the solution of a nonlinear equation as a sequence of approximations. The method gives convergent successive approximations of the exact solution if such a solution exists; otherwise, approximations can be used for numerical purposes. The idea of the PIM is very simple and straightforward. Here, the objective was to suggest an explicit iterative approximation based on the PIM. The change of variable

$$v(t) = \int_0^t u(x)dx, \quad \frac{d}{dt} v(t) = u(t)$$

yields an equivalent system of first-order nonlinear ordinary differential equations (ODEs) as below:

$$\begin{cases} v' = u, & v(0) = 0 \\ u' = \frac{1}{\kappa}(u - u^2 - uv), & u(0) = u_0. \end{cases} \quad (3)$$

The above nonlinear system was solved for  $u_0 = 0.1$  and various values of  $\kappa$ . It should be indicated that the nonlinear system (3) becomes increasingly stiff as the corresponding parameter within the frame of system is decreased. Now, to explain the basic idea of the PIM, the nonlinear system is first written (3) as below:

$$\begin{bmatrix} v' \\ u' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\kappa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\kappa}(-u^2 - uv) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v(0) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

or, compactly,

$$U' = AU + B(t, U), \quad U(0) = U_0, \quad (5)$$

Then, (5) was considered as:

$$\mathcal{L}[U(t)] + \mathcal{N}[U(t)] = g(t), \quad (6)$$

Since the PIM provided the great freedom of choosing the auxiliary linear operator  $L$ , the following form for (5) was considered:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[U(t)] &= U' + AU, \\ \mathcal{N}[U(t)] &= -2AU - B(t, U), \\ g(t) &\equiv 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Thus, the explicit parametric iteration formula for solving (5) was as follows [2, 3]:

$$\mathcal{L}[U_{n+1}(t) - U_n(t)] = h\mathcal{A}[U_n(t)], \quad (8)$$

with the initial condition

$$U_{n+1}(0) = U_0, \quad \forall n \geq 0, \quad (9)$$

that

$$\mathcal{A}[U_n(t)] = \mathcal{L}[U_n(t)] + \mathcal{N}[U_n(t)] - g(t) \equiv U_n' - AU_n - B(t, U_n), \quad (10)$$

and the subscript  $n$  denotes the  $n$ th iteration, and  $U_0(t)$  is the initial guess, which can be freely determined from solving its corresponding linear homogeneous equation or linear nonhomogeneous equation i.e.,  $\mathcal{L}[U_0(t)] = 0$  or  $\mathcal{L}[U_0(t)] = g(t)$ . Thus, the following explicit scheme was derived for solving (3), which was called the spectral PIM [3]:

$$\begin{cases} .25cm\mathcal{L}[U_{n+1}^N(t_{L,k}^N) - U_n^N(t_{L,k}^N)] = h\mathcal{A}[U_n^N(t_{L,k}^N)], \\ U_{n+1}^N(0) = U_0, \quad n \geq 0, \quad k = 0,1,\dots,N, \end{cases} \tag{11}$$

Therefore, the following explicit piecewise spectral PIM formula for solving the system (11) was obtained:

$$u_{j,n+1}^{N,s+1} = (1 + h)u_{j,n}^{N,s+1} + hL_j^{-1}(N_j u_{j,n}^{N,s+1} - g_{j,s}), \quad j = 1,2 \tag{12}$$

In using algorithm (12), the best possible initial approximation that satisfied the initial conditions was chosen.

### Results and discussion

In this section, several stiff cases of the system (3) are analyzed to show the efficiency of the proposed method for approximating the solution of Volterra’s population model by comparing with numerical method. As mentioned above, the nonlinear system (3) becomes increasingly stiff as the corresponding parameter  $\kappa$  within the frame of system (3) is decreased. To investigate the valid region  $h$  of the solution obtained via the spectral PIM algorithm (12) when  $N = 15$  for the system (3) with  $\kappa = 10^{-4}$ , the curve of  $u'(0)$  with respect to  $h$  was plotted as shown in Figure 1. According to this curve, it is easy to discover the valid region of  $h$ . It is usually convenient to investigate the valid region  $h$  of the PIM by means of such types of curves. In view of Figure 1, one can easily discover the valid region of  $h$ , which is almost  $h \in (-1.5, -7.5)$  for this problem.

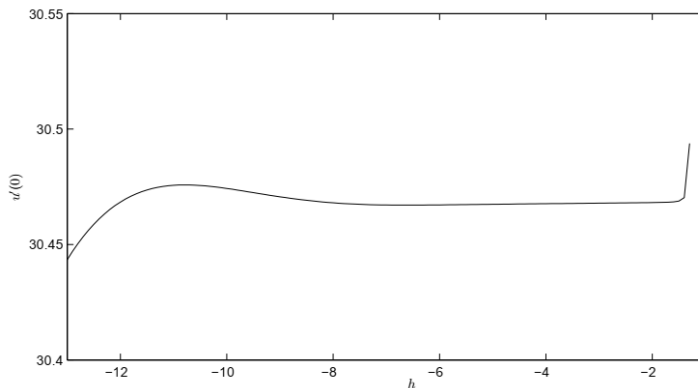


Figure 1. The valid region  $h$  of the spectral PIM when  $N = 15$ .

Moreover, as mentioned above, an approximate optimal value of  $h$  can be found by estimating the residual error  $Res(h)$  in a sequence of values  $h$  as the value of  $h$  with the lowest residual will be the approximate optimal  $h$ . Figure 2 shows the approximate optimal value of  $h$  of the spectral PIM when  $N = 15$  and also the corresponding error of the solution for the approximate optimal  $h$  (i.e.,  $h = -1.79$  with two decimal digits).

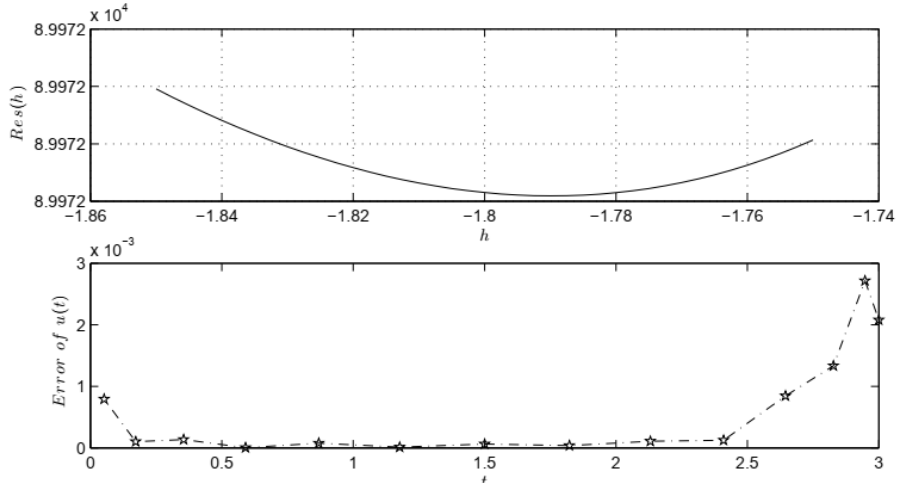


Figure 2. The approximate optimal  $h$  and the corresponding error of the solution.

**Conclusion**

In this paper, an explicit algorithm based on the parametric iteration method and spectral collocation method was proposed for solving Volterra’s population model. A considerable advantage of this method is that it is an explicit method for solving the resulting stiff system. The proposed explicit method is easy to implement, accurate when applied to this stiff, nonlinear Volterra model.

## یک روش تکراری پارامتری طیفی برای حل مدل جمعیت ولترا

محمود پارسامنش<sup>۱\*</sup>، مجید عرفانیان<sup>۲</sup>، اصغر قربانی<sup>۳</sup>

- ۱- استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه فنی و حرفه‌ای، تهران، ایران
- ۲- دانشیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه زابل، زابل، ایران.
- ۳- استادیار، گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی، مشهد، ایران.

### چکیده

### اطلاعات مقاله

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۰۳/۱۲

بازنگری مقاله: ۱۴۰۰/۰۶/۰۹

پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۶/۲۸

### کلید واژگان:

روش تکراری پارامتری طیفی  
مدل جمعیت ولترا  
معادلات انتگرال  
دستگاه سخت

\*نویسنده مسئول: محمود پارسامنش

پست الکترونیکی:

[mparsamansh@tvu.ac.ir](mailto:mparsamansh@tvu.ac.ir)

معادلات انتگرال در شاخه‌های مختلف ریاضی و ریاضی فیزیک به‌طور گسترده‌ای ظاهر می‌شوند و بسیاری از مسائل مقدار اولیه و مقدار مرزی مربوط به معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی می‌توانند به معادلات انتگرال تبدیل و حل گردند. در روش‌های صریح، عموماً اگر نقاط گره‌ای بسیار زیاد باشد یک تقریب خوب از جواب را برای معادله‌ی سخت فراهم می‌کنند. اما از نقطه نظر محاسباتی این موضوع قابل قبول و به صرفه نیست، زیرا نیازمند هزینه‌ی بالای محاسبات و صرف زمان زیادی می‌باشد. لذا، روش‌های ضمنی پیشنهاد می‌شود، که برای به دست آوردن جواب تقریبی باید یک دستگاه غیرخطی از معادلات را با استفاده از روش ژاکوبین حل نماییم. از طرفی، با اضافه کردن تعداد گره‌ها و افزایش بعد ماتریس بررسی همگرایی و پایداری یک مشکل جدی خواهد بود. در این مقاله، یک روش ترکیبی صریح براساس روش تکراری پارامتری و روش هم‌محلی طیفی برای شبیه‌سازی جواب مدل ولترای غیرخطی سخت که برای رشد جمعیت یک گونه در یک سیستم بسته استفاده می‌شود، ارائه می‌دهیم. روش ارائه شده اینجا دارای این مزیت است که به حل دستگاه غیرخطی که در ارزیابی ژاکوبین به آن برخورد می‌کنیم، نیازی نیست. اینجا، ابتدا معادله‌ی جمعیت ولترای غیرخطی به یک دستگاه غیرخطی متناظر تبدیل می‌شود. سپس یک جمله‌ی خطی به قسمت دیفرانسیلی معادله اضافه می‌شود. این جمله خطی اضافه شده می‌تواند به پایداری روش کمک کند، چون جواب‌ها در این حالت بر اساس توابع نمایی بیان می‌شوند. در ضمن پارامتر کمکی درون روش باعث همگرایی سریع روش می‌شود. نتایج به دست آمده در این مقاله عملکرد عالی روش توسعه یافته را نمایش می‌دهد.

## مقدمه

بسیاری از مسائل ظاهر شده در فیزیک و علوم مهندسی در قالب معادلاتی قابل بیان هستند که جواب تحلیلی برای آنها نمی‌توان یافت و یا به دست آوردن چنین جوابی بسیار دشوار است. از این رو برای حل این معادلات معمولاً روش‌های عددی مورد استفاده قرار می‌گیرند (عسکری و طاهری، ۲۰۲۰؛ محمدخانی حاجی خواجه لو و ملکی، ۲۰۲۰؛ شعبانی و همکاران، ۲۰۱۹).

معادلات انتگرال در شاخه‌های مختلف ریاضی و ریاضی فیزیک به طور گسترده‌ای ظاهر می‌شوند و از آنجا که معادلات انتگرال نسبت به معادلات دیفرانسیل کارآمدتر می‌باشند، بسیاری از مسائل مقدار اولیه و مقدار مرزی مربوط به معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی را که می‌توانند به معادلات انتگرال تبدیل شوند از این طریق حل می‌نماییم. معادله‌ی انتگرال-دیفرانسیل مرتبه‌ی اول ولترای

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2 - cp \int_0^T p(x)dx, \quad p(0) = p_0, \quad (1)$$

را بر اساس مراجع (اسکودو، ۱۹۷۱؛ اسمال، ۱۹۸۳)<sup>۱</sup> برای مدل رشد جمعیت یک گونه‌ی خاص در یک سیستم بسته تعریف می‌کنیم که  $a > 0$  ضریب نرخ تولد،  $b > 0$  ضریب تراکم جمعیت،  $p_0$  جمعیت اولیه،  $p = p(T)$  نشان دهنده‌ی جمعیت در زمان  $T$  و  $c > 0$  ضریب میزان سمی بودن می‌باشد. لازم به ذکر است ضریب  $c$  رفتار ضروری تراکم جمعیت، قبل از اینکه سطح آن در دراز مدت به صفر برسد را نشان می‌دهد. است. همچنین

$$cp \int_0^T p(x)dx,$$

اثر تجمع سم در گونه‌ی خاص را مشخص می‌کند.

با تعریف متغیرهای بدون بعد  $t = \frac{Tc}{b}$  و  $u = \frac{bp}{a}$  به عنوان معیار زمان و معیار جمعیت و جایگذاری در مساله‌ی (۱) خواهیم داشت:

$$\kappa \frac{du}{dt} = u - u^2 - u \int_0^t u(x)dx, \quad u(0) = u_0 \quad (2)$$

که  $u(t)$  جمعیت اندازه‌پذیر از افراد یکسان در زمان  $t$  و  $\kappa = c/(ab)$  یک پارامتر تجویز شده بدون بعد می‌باشد. بدیهی است که تنها جواب متعادل معادله‌ی (۲)  $u(t) = 0$  و جواب تحلیلی آن بر اساس مرجع (تی بیست، ۱۹۹۷)<sup>۲</sup> به صورت زیر می‌باشد.

$$u(t) = u_0 \exp\left(\frac{1}{\kappa} \int_0^t \left[1 - u(\tau) - \int_0^\tau u(x)dx\right] d\tau\right),$$

همچنین برای هر  $t$  اگر  $u_0 > 0$  خواهیم داشت:

$$u(t) > 0.$$

<sup>1</sup> Scudo; Small

<sup>2</sup> TeBeest

با وجود آن که فرم بسته جواب معادله‌ی (۱) در مراجع (اسکودو، ۱۹۷۱؛ اسمال، ۱۹۸۳) و چندین روش عددی در مراجع (آل-خالد، ۲۰۰۵؛ وازواز، ۱۹۹۹)<sup>۱</sup> برای محاسبه‌ی مدل ولترای مورد بحث ارائه شده است، اما در مرجع (اسکودو، ۱۹۷۱) به طور واضح و دقیق ثابت شده است که این فرم بسته منجر به درک رفتار تکامل جمعیت نمی‌شود. در روش‌های صریح، عموماً اگر نقاط گره‌ای بسیار زیاد باشد یک تقریب خوب از جواب را برای معادله‌ی سخت (معادله‌ی غیرخطی تعریف شده روی دامنه نامتناهی) فراهم می‌کنند. اما از نقطه نظر محاسباتی این موضوع قابل قبول و به صرفه نیست، زیرا نیازمند هزینه‌ی بالای محاسبات و صرف زمان زیادی می‌باشد. لذا، روش‌های ضمنی پیشنهاد می‌شود، که برای به دست آوردن جواب تقریبی باید یک دستگاه غیرخطی از معادلات را با استفاده از روش ژاکوبین حل نماییم. با اضافه کردن تعداد گره‌ها و افزایش بعد ماتریس بررسی همگرایی و پایداری یک مشکل جدی خواهد بود. لذا در این مقاله یک الگوریتم صریح بر پایه‌ی استفاده از طرح طیفی و روش تکراری پارامتری (PIM) ذکر شده در مراجع (قربانی، ۲۰۰۸؛ قربانی و صابری نجفی، ۲۰۱۱؛ ترفتن، ۲۰۰۰؛ ویدمان و ردی، ۲۰۰۰)<sup>۲</sup> برای به دست آوردن جواب تقریبی برای مساله‌ی بدون بعد (۲) ارائه می‌شود.

### روش تکراری پارامتری طیفی

روش تکراری پارامتری یک روش تقریبی برای حل مسائل خطی و غیر خطی می‌باشد که در ابتدا برای حل یک معادله دیفرانسیل کسری در مرجع (قربانی، ۲۰۰۸) پیشنهاد گردید. ایده‌ی روش تکراری پارامتری بسیار ساده و سراسر است است به طوری که جواب یک معادله‌ی غیرخطی را به عنوان دنباله‌ای از جواب‌های تقریبی در نظر می‌گیرید. در این مقاله با استفاده از روش تکراری پارامتری و تغییر متغیر زیر یک تقریب تکراری صریح را پیشنهاد می‌دهیم.

$$v(t) = \int_0^t u(x) dx, \quad \frac{d}{dt} v(t) = u(t)$$

بنابراین دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی غیر خطی مرتبه اول زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} v' = u, & v(0) = 0 \\ u' = \frac{1}{\kappa}(u - u^2 - uv), & u(0) = u_0. \end{cases} \quad (3)$$

در این پژوهش دستگاه غیرخطی بالا را به ازای  $u_0 = 0.1$  و مقادیر مختلفی از  $\kappa$  مورد تحلیل قرار می‌دهیم و نشان می‌دهیم متناظر با پارامتر در نظر گرفته شده و بدون کاستن از کلیت دستگاه غیرخطی (۳) این دستگاه به طور فزاینده‌ای سخت می‌شود. لذا دستگاه غیر خطی (۳) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} v' \\ u' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\kappa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\kappa}(-u^2 - uv) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v(0) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

یا به صورت فشرده‌تر،

<sup>1</sup> Al-Khaled; Wazwaz

<sup>2</sup> Trefethen; Weideman, & Reddy

$$U' = AU + B(t, U), \quad U(0) = U_0, \quad (5)$$

که

$$U(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ u(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\kappa} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$B(t, U) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\kappa}(-u^2 - vu) \end{bmatrix}, \quad U_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}.$$

با در نظر گرفتن معادله (۵) به صورت زیر داریم:

$$\mathcal{L}[U(t)] + \mathcal{N}[U(t)] = g(t), \quad (7)$$

که  $\mathcal{L}$  یک عملگر خطی کمکی نسبت به  $U$  با شرط  $\mathcal{L}[V] \equiv 0$  اگر  $V \equiv 0$  و  $\mathcal{N}$  یک عملگر غیرخطی نسبت به  $U$  و  $g(t)$  منبع نامیده می‌شوند. با انتخاب عملگر خطی کمکی  $\mathcal{L}$  معادله (۵) را به فرم زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[U(t)] &= U' + AU, \\ \mathcal{N}[U(t)] &= -2AU - B(t, U), \\ g(t) &\equiv 0. \end{aligned} \quad (8)$$

بنابراین، رابطه‌ی تکراری پارامتری صریح برای حل (۵) به صورت زیر (قربانی، ۲۰۰۸؛ قربانی و صابری نجفی، ۲۰۱۱):

$$\mathcal{L}[U_{n+1}(t) - U_n(t)] = h\mathcal{A}[U_n(t)], \quad (9)$$

با شرط اولیه

$$U_{n+1}(0) = U_0, \quad \forall n \geq 0, \quad (10)$$

که

$$\mathcal{A}[U_n(t)] = \mathcal{L}[U_n(t)] + \mathcal{N}[U_n(t)] - g(t) \equiv U_n' - AU_n - B(t, U_n), \quad (11)$$

تبدیل می‌شود. که  $n$ ، اندیس  $n$ امین تکرار و  $U_0(t)$  حدس اولیه را نشان می‌دهد، و به صورت آزادانه با حل معادله‌ی خطی همگن  $\mathcal{L}[U_0(t)] = 0$  یا غیرهمگن خطی  $\mathcal{L}[U_0(t)] = g(t)$  بدست می‌آید. همچنین  $h \neq 0$ ، پارامتر به اصلاح کمکی می‌باشد.

با استفاده از روش تقریبات متوالی برای  $n \geq 1$  تابع  $U_n(t)$  از روش تکراری پارامتری قابل دستیابی خواهد بود و در نتیجه، جواب دقیق با استفاده از

$$U(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(t),$$

ممکن است به دست آید. بنابراین با استفاده از نرم افزارهای محاسباتی همانند میپل، متلب، ممتیکا (1 + n) امین مرتبه معادلات روش تکراری پارامتری (۹) که تشکیل یک مجموعه دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی خطی می‌دهد به آسانی قابل حل است. از آنجایی که استفاده از روش تکرارهای متوالی از تکرار پارامتری در حل دستگاه غیرخطی (۵) ممکن است پیچیده‌تر باشند، در نتیجه انتگرال‌های به دست آمده از این روابط تکراری ممکن است به صورت تحلیلی قابل حل نباشند، بنابراین به منظور رفع این محدودیت یک الگوریتم تکراری پارامتری عددی بر مبنای روش هم‌محلی طیفی برای حل (۵) در این مقاله ارائه شده است. بنابراین نقاط  $t_j^N, j = 0, 1, \dots, N$  را به عنوان نقاط استاندارد درونیایی چیبیشف-گوس-لوباتو روی بازه  $[1, -1]$  قرار می‌دهیم. همچنین تابع‌های وزن متناظر به صورت

$$w_j^N, j = 0, 1, \dots, N,$$

و گرہ‌های درونیایی انتقال یافته چیبیشف-گوس-لوباتو روی بازه  $\Lambda = (0, L)$  بصورت

$$t_{L,j}^N = \frac{L}{2} (t_j^N + 1), j = 0, 1, \dots, N,$$

و وزن‌های متناظر به صورت

$$w_{L,j}^N = \frac{L}{2} w_j^N, j = 0, 1, \dots, N,$$

هستند. که  $\mathcal{P}_N(\Lambda)$  مجموعه‌ای از چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه‌ی  $N$  می‌باشد. برای آماده سازی روش تکراری پارامتری هم‌محلی طیفی (۹) از (۹)-(۱۰) و نقاط هم‌محلی بالا، استفاده و  $U(t)$  را توسط  $U^N \in (\mathcal{P}_N(\Lambda))^2$  تقریب می‌زنیم. در نتیجه، طرح صریح زیر برای حل معادله‌ی (۳) نتیجه می‌شود، که روش تکرار پارامتری طیفی نامیده می‌شود (قرابانی و صابری نجفی، ۲۰۱۱):

$$\begin{cases} \mathcal{L}[U_{n+1}^N(t_{L,k}^N) - U_n^N(t_{L,k}^N)] = h\mathcal{A}[U_n^N(t_{L,k}^N)], \\ U_{n+1}^N(0) = U_0, \quad n \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots, N, \end{cases} \quad (12)$$

برای اطمینان از این که تقریبات حاصل از (۱۲) برای  $t$ های بزرگ صحیح است، جواب را در یک دنباله از زیر بازه‌های مساوی تعیین می‌کنیم، که این موضوع به پیوستگی شرایط در نقاط انتهایی هر زیر بازه مربوط می‌باشد. لذا با فرض این که دستگاه (۳) روی بازه  $[0, L]$  حل شده باشد، مجموعه‌ای از بازه‌های جدا از هم را به صورت زیر تعریف می‌نماییم

$$I_{\Delta_s}^S = [t^S, t^{S+1}),$$

که

$$(\Delta)_S \equiv \Delta_S = t^{S+1} - t^S, t^0 = 0, t^M = L, \bigcup_{s=0}^{M-1} I_{\Delta_S}^S = [0, L]$$

یک روش تکراری پارامتری طیفی برای حل مدل جمعیت ولترا فصلنامه علمی کارافن، ۱۹ (۱۴۰۱). ویژه‌نامه، ۶۳۳-۶۱۹

که  $M$  تعداد زیر بازه‌های جدا از هم را روی بازه  $[0, L]$  نشان می‌دهد. همچنین فرض می‌کنیم که نقاط  $t_{L_s,1}^s, \dots, t_{L_s,N}^s$  نقاط انتقال یافته چبیشف رو بازه  $I_{\Delta_s}^s$  با شرایط

$$t_{L_s,N}^s = t^s, t_{L_s,1}^s = t^{s+1},$$

می‌باشد. از طرفی بر اساس مرجع (قربانی و صابری نجفی، ۲۰۱۱)، روش تکرار پارامتری طیفی صریح تکه‌ای برای حل دستگاه (۱۲) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$u_{j,n+1}^{N,s+1} = (1+h)u_{j,n}^{N,s+1} + hL_j^{-1}(N_j u_{j,n}^{N,s+1} - g_{j,s}), \quad j = 1, 2 \quad (13)$$

که  $u_j^N(t)$  مولفه‌ی  $j$ ام از جواب  $U^N(t)$  و  $L$ ،  $N$  و  $g$  در مرجع (قربانی و صابری نجفی، ۲۰۱۱) بیان شده‌اند. همچنین بردار  $u_{j,n+1}^{N,s+1}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u_{j,n+1}^{N,s+1} = \{u_{j,n+1}^{N,s+1}(t_{L_s,1}^s), \dots, u_{j,n+1}^{N,s+1}(t_{L_s,N}^s)\}.$$

با استفاده از الگوریتم (۱۳)، و انتخاب یک تقریب اولیه مناسب به ممکن است تقریب اولیه

$$\mathcal{L}[u_0^N(t)] = 0, \quad \text{or} \quad \mathcal{L}[u_0^N(t)] = g(t),$$

حاصل شود. بنابراین، با شروع از تقریب اولیه  $u_0^N(t)$  می‌توانیم فرمول بازگشتی (۱۳) را جهت بدست آوردن تقریبات متوالی مستقیم  $u_{n+1}^N(t)$  برای  $n \geq 0$  به کار ببریم. حضور پارامتر  $h$  در (۱۲) و (۱۳) می‌تواند نقش مهمی در عدم شکست همگرایی روش تکرار پارامتری طیفی قطعه‌ای بازی کند و با انتخاب یک ناحیه‌ی معتبر از  $h$  برای هر مساله‌ی فیزیکی می‌تواند به صورت یک مقدار بهینه از پارامتر تسریع همگرایی  $h$  در مرتبه‌ی تقریب  $n$  به وسیله‌ی خطای باقیمانده

$$Res(h) = \int_{t_s}^{t_{optional}} \mathcal{A}[u_n^{N,s}(t; h)]^2 dt, \quad (14)$$

حاصل شود (قربانی و صابری نجفی، ۲۰۱۱). همچنین معمولاً نزدیک به  $t_s$  انتخاب می‌شود و به راحتی می‌توان معادله‌ی (۱۴) را با تحمیل شرط

$$\frac{dRes(h)}{dh} = 0,$$

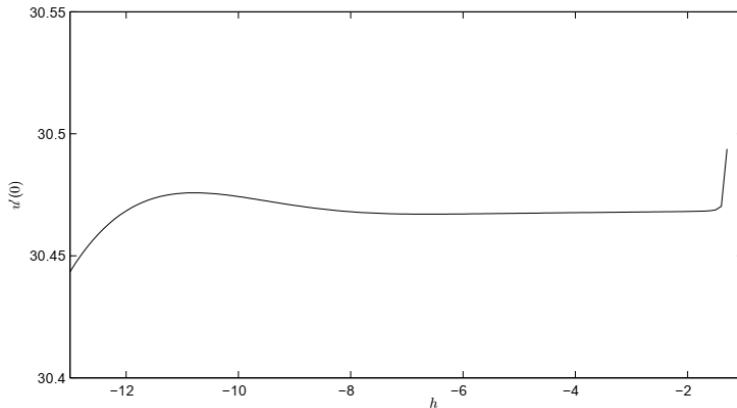
مینیمم کرد. از آنجاییکه پیدا کردن  $h$  بهینه نیازمند صرف زمان زیادی است، برای اجتناب از تحمیل هزینه‌ی محاسباتی، مقدار تقریبی  $h$  بهینه را می‌توان با تخمین خطای باقیمانده  $Res(h)$  در یک دنباله از مقادیر  $h$  یعنی  $\{h_0, \dots, h_M\}$  مشخص کرد. در نتیجه مقدار  $h$  با کمترین خطای باقیمانده، تقریب بهینه‌ای از  $h$  خواهد بود.

## مثال‌های عددی

در این بخش، برای نشان دادن کارایی روش ارائه شده در بالا (یعنی روند (۱۳)) برای تقریب جواب مدل جمعیت ولترا در مقایسه با روش‌های عددی دیگر چندین حالت سخت از دستگاه (۳) ارائه شده است. اینجا از روش نرم افزار Matlab بنام ode15s که برای حل مسائل سخت می باشد، برای اهداف مقایسه استفاده شده است.

لذا بنابر مطالب گفته شده، هنگامی که پارامتر متناظر  $\kappa$  در دستگاه (۳) کاهش می‌یابد، دستگاه غیرخطی (۳) به طور فزاینده‌ای سخت می‌شود. جهت بررسی ناحیه‌ی اعتبار  $h$  از جواب به دست آمده با استفاده از الگوریتم روش تکرار پارامتری طیفی (۱۲) برای  $N = 15$  در دستگاه غیرخطی (۳) با انتخاب  $\kappa = 10^{-4}$ ، منحنی  $u'(0)$  نسبت به  $h$  را در شکل ۱ رسم می‌کنیم. قطعه خط موازی محور  $x$ ها ناحیه معتبر همگرایی روش را ( $h \in [-7.5, -1.5]$ ) نشان می‌دهد. آن را متذکر می‌شویم که روش تکرار تغییراتی به ازای  $h = -1$  یک حالت خاصی از روش تکرار پارامتری مطرح شده در این کار می‌باشد.

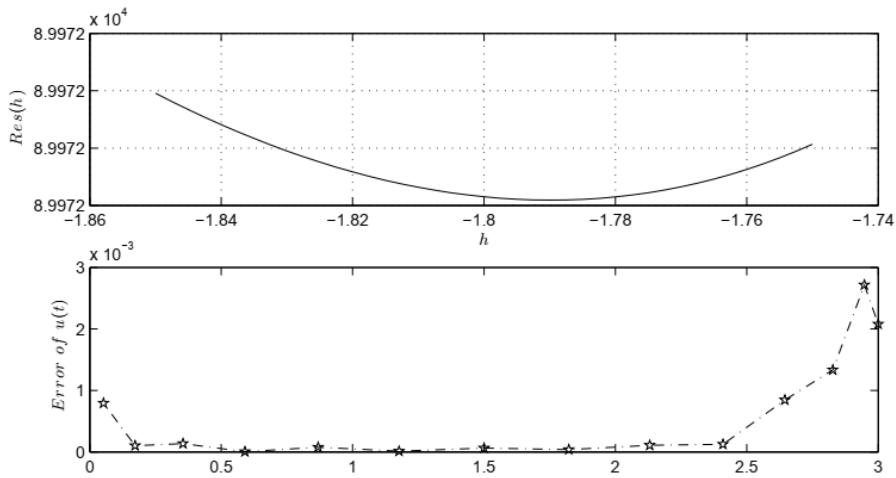
با انتخاب  $h = -1$  و  $\kappa = 10^{-4}$ ، روش تکرار پارامتری طیفی (۱۲) دیده می‌شود که جواب دستگاه (۳) واگرا می‌شود چون  $h = -1$  (یعنی روش تکرار تغییراتی) در بازه‌ی همگرایی قرار ندارد. اکنون، حضور پارامتر کمکی  $h$  در چهارچوب روش تکرار پارامتری طیفی نقش مهمی می‌تواند ایفا کند. بنابراین با توجه به شکل ۱، ناحیه‌ی اعتباری  $h$  برای این مساله تقریباً  $h \in (-7.5, -1.5)$  می‌باشد. بنابراین روش تکرار پارامتری طیفی مطرح شده اینجا به ازای هر انتخاب  $h$  از ناحیه‌ی معتبر بالا همگرا می‌باشد. در مورد مقدار بهینه تقریبی شکل ۲ را ملاحظه کنید.



شکل ۱. ناحیه اعتباری  $h$  برای این مساله با  $N = 15$

علاوه بر این، همان گونه که در بالا ذکر شد، با به دست آوردن خطای باقیمانده  $Res(h)$  برای دنباله‌ای از مقادیر  $h$ ، می‌توان مقدار تقریبی  $h$  بهینه را پیدا کرد.

در شکل ۲ مقدار تقریبی بهینه‌ی  $h$  را برای روش تکرار پارامتری طیفی هنگامی که  $N = 15$  را رسم نموده‌ایم. مشاهده می‌شود که به ازای  $h = -1.79$  خطای جواب متناظر مقدار کمینه می‌باشد.



شکل ۲. مقدار تقریبی بهینه  $h$  برای روش تکرار پارامتری طیفی در  $N = 15$  و خطای متناظر.

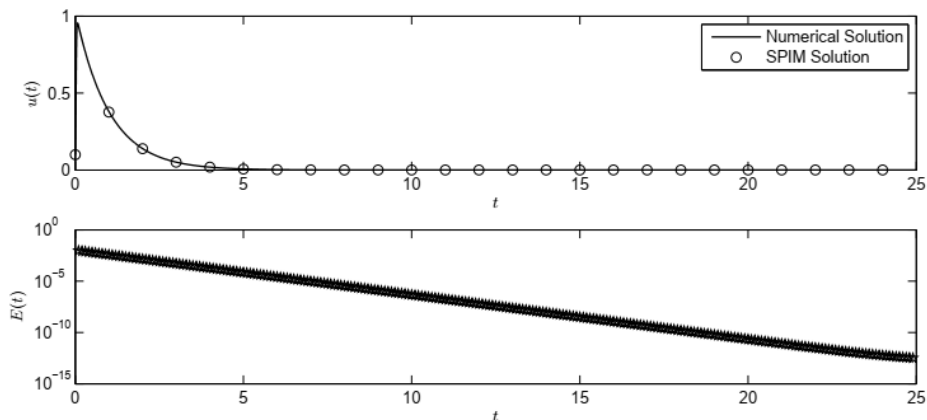
اکنون، جواب دستگاه سخت (۳) را به ازای مقادیر (که دستگاه مورد مطالعه سخت می باشد)

$$\kappa = 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}$$

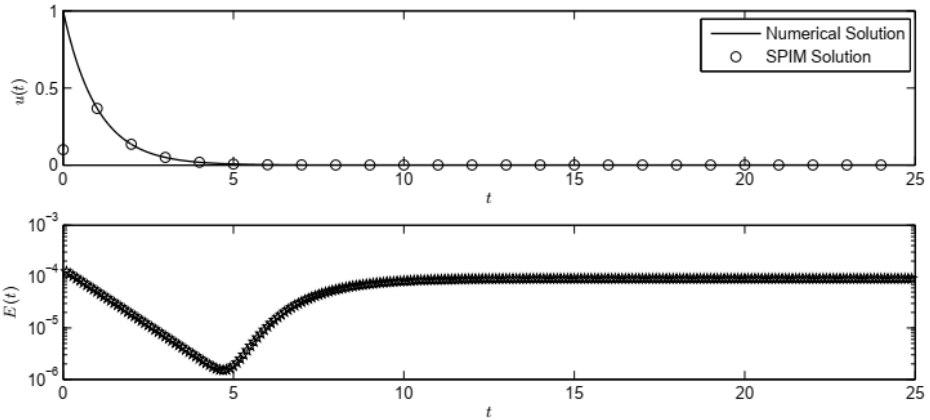
با استفاده از روش تکرار پارامتری طیفی قطعه‌ای (۱۳) با پارامتر دلخواه  $h = -1$  و با طول گام  $\Delta_s = 0.1$  روی بازه  $[0, 2.5]$  رسم می‌نماییم. در ادامه در شکل‌های سه تا شش مقایسه بین حل کننده‌ی عددی متلب یعنی (ode15s) و روش تکرار پارامتری طیفی قطعه‌ای و همچنین قدرمطلق خطای

$$E(t) = |u_{Num}(t) - u_{SPIM}(t)|,$$

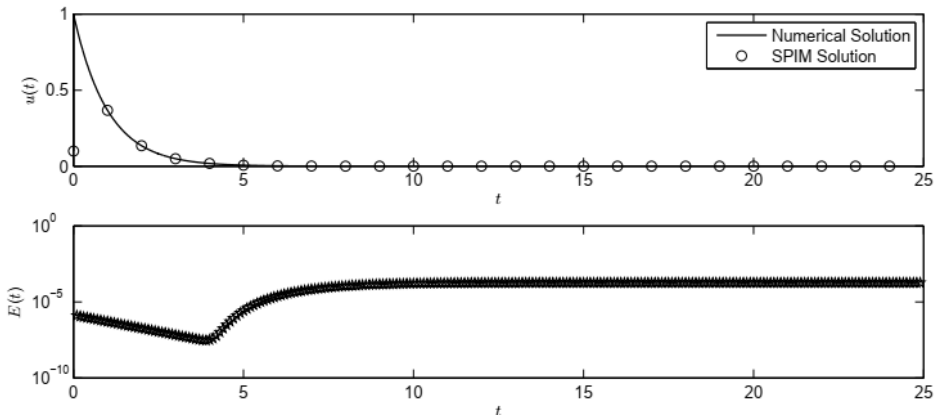
برای  $N = 5$  را نشان می‌دهند.



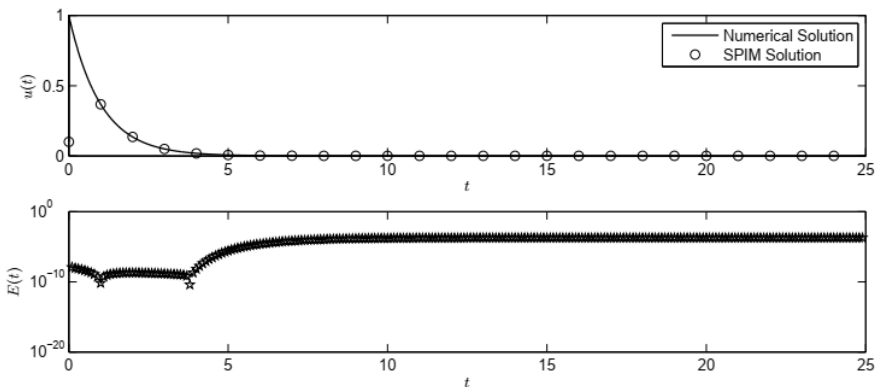
شکل ۳. نتایج عددی روش تکرار پارامتری طیفی قطعه‌ای برای  $N = 5$  در حالت  $\kappa = 10^{-2}$ .



شکل ۴. نتایج عددی روش تکرار پارامتری طیفی قطعه‌ای برای  $N = 5$  در حالت  $\kappa = 10^{-4}$



شکل ۵. نتایج عددی روش تکرار پارامتری طیفی قطعه‌ای برای  $N = 5$  در حالت  $\kappa = 10^{-6}$



شکل ۶. نتایج عددی روش تکرار پارامتری طیفی قطعه‌ای برای  $N = 5$  در حالت  $\kappa = 10^{-8}$

از نتایج عددی حالت‌های بررسی شده ساده است نتیجه بگیریم که روش تکرار پارامتری طیفی قطعه‌ای صریح ارائه شده در این مقاله برای حل دستگاه سخت (۳) بسیار کارا و موثر می‌باشد.

## نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک الگوریتم صریح بر مبنای روش تکرار پارامتری و روش هم‌محلی طیفی برای حل مدل جمعیت ولترا ارائه شده است. مزیت قابل توجه این روش این است که یک روش صریح برای حل دستگاه سخت نتیجه می‌دهد. پیاده‌سازی روش صریح ارائه شده هنگامی که برای مدل ولترای غیرخطی سخت به کار می‌رود، آسان و دقیق است.

## References

- Al-Khaled, K. (2005). Numerical approximations for population growth models. *Applied Mathematics and Computation*, 160(3), 865-873. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2003.12.005>
- Askari, N., & Taheri, M. H. (2020). Numerical Investigation of a MHD Natural Convection Heat Transfer Flow in a Square Enclosure with Two Heaters on the Bottom Wall. *Karafan Quarterly Scientific Journal*, 17(1), 97-114. <https://doi.org/10.48301/kssa.2020.112759>
- Ghorbani, A. (2008). Toward a new analytical method for solving nonlinear fractional differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(49-50), 4173-4179. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.04.015>
- Ghorbani, A., & Saberi-Nadjafi, J. (2011). A piecewise-spectral parametric iteration method for solving the nonlinear chaotic Genesisio system. *Mathematical and Computer Modelling*, 54(1), 131-139. <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2011.01.044>
- Mohammad Khani Haji KhajeLu, b., & Maleki, M. (2020). Experimental Investigation of Dynamic Density of Aluminum Powder under High Speed Loading. *Karafan Quarterly Scientific Journal*, 17(1), 147-163. <https://doi.org/10.48301/kssa.2020.112762>
- Scudo, F. M. (1971). Vito Volterra and theoretical ecology. *Theoretical Population Biology*, 2(1), 1-23. [https://doi.org/10.1016/0040-5809\(71\)90002-5](https://doi.org/10.1016/0040-5809(71)90002-5)
- Shabani, M., Farokhzad, F., & Shojaei, F. (2019). Numerical analysis of the effects of clay blanket and cut-off wall on reducing seepage from earth dam foundation. *Karafan Quarterly Scientific Journal*, 16(45), 107-126. [https://karafan.tvu.ac.ir/article\\_100535.html?lang=en](https://karafan.tvu.ac.ir/article_100535.html?lang=en)
- Small, R. D. (1983). Population growth in a closed system. *Society for Industrial and Applied Mathematics review*, 25(1), 93-95. <https://doi.org/10.1137/1025005>
- TeBeest, K. G. (1997). Classroom Note: numerical and analytical solutions of Volterra's population model. *Society for Industrial and Applied Mathematics review*, 39(3), 484-493. <https://doi.org/10.1137/S0036144595294850>
- Trefethen, L. N. (2000). *Spectral methods in MATLAB*. Society for Industrial and Applied Mathematics. <https://dl.acm.org/doi/book/10.5555/357801>
- Wazwaz, A.-M. (1999). Analytical approximations and Padé approximants for Volterra's population model. *Applied Mathematics and Computation*, 100(1), 13-25. [https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(98\)00018-6](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(98)00018-6)
- Weideman, J. A., & Reddy, S. C. (2000). A MATLAB differentiation matrix suite. *ACM Transactions on Mathematical Software* 26(4), 465-519. <https://doi.org/10.1145/365723.365727>