



Fast Texture Retrieval Using Walsh-Hadamard Transform

Mohammad Amiri^{1*}

¹Assistant Professor, Department of Computer Engineering, Technical and Vocational University (TVU), Tehran, Iran.

ARTICLE INFO

Received: 02.20.2021

Revised: 04.17.2021

Accepted: 05.17.2021

Keyword:

Texture similarity

Earth mover distance

Walsh-Hadamard transform

***Corresponding Author:**

Mohammad Amiri

Email: amiri.mgh@gmail.com

ABSTRACT

One of the most important issues in image processing is to find algorithms that can determine the similarity and dissimilarity of a texture image with other images in a short time. Because texture images have repetitive patterns throughout the image, similarity algorithms for natural or non- texture images are not effective for texture images. Deep learning algorithms also require large amounts of data in the same group and for texture images that do not have much data volumes available, they do not work. In this paper, an algorithm was developed to rapidly search for texture similarity using the Walsh-Hadamard transform. This algorithm consists of three steps. In the first step, the Gabor filter was used to extract the high-dimensional feature from each texture. Then, a randomized Walsh-Hadamard transform was used to convert high-dimensional feature from each texture into two-dimensional feature. In the third step, an earth mover distance (EMD) approximation algorithm was used to determine the similarity or dissimilarity between two textures that are represented by two-dimensional vectors. The results of the proposed algorithm proved that this approximation algorithm is relatively suitable for real tissues.





بازیابی سریع تصاویر بافتی با استفاده از تبدیل والش - هادامارد

محمد امیری^{۱*}

۱- استادیار، گروه مهندسی کامپیوتر، دانشگاه فنی و حرفه‌ای، تهران، ایران.

چکیده	اطلاعات مقاله
<p>یکی از مسائل مهم در پردازش تصویر، پیدا کردن الگوریتم‌هایی است که بتوان تشابه و عدم تشابه یک تصویر یافت را با سایر تصاویر در زمان کوتاه مشخص کند. از آنجایی که تصاویر بافت دارای الگوهای تکرارشونده در کل تصویر هستند، الگوریتم‌های مشابهت‌یابی برای تصاویر معمولی برای تصاویر بافت کارایی ندارند. الگوریتم‌های مبتنی بر یادگیری عمیق هم نیازمند حجم بسیار زیادی داده در همان گروه هستند و برای تصاویر بافت که حجم داده زیادی در دسترس نباشد کارایی ندارند. در این مقاله، الگوریتمی برای جستجوی سریع تشابه بافتی با استفاده از تبدیل والش- هادامارد، توسعه داده شد. این الگوریتم، از سه مرحله تشکیل شده است: در مرحله اول از فیلتر گابور برای استخراج بردارهایی با ابعاد بالا از هر بافت، استفاده شد. سپس، از یک تبدیل تصادفی شده والش- هادامارد استفاده گردید تا بردارهایی با ابعاد بالا به بردارهایی با دو بُعد جای‌گذاری شود. در مرحله سوم، از یک الگوریتم تقریب برای اندازه‌گیری فاصله بین دو بردار استفاده شد تا تشابه یا عدم تشابه بین دو تصویر بافت مشخص شود. نتایج آزمایش عملی الگوریتم گواه این امر هستند که این تقریب برای بافت‌های واقعی نسبتاً مناسب هستند.</p>	<p>دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۱۰/۱۶ بازنگری مقاله: ۱۴۰۰/۰۴/۱۹ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۶/۱۳</p> <p>کلید واژگان: تشابه بافتی فاصله حرکت زمینی تبدیل والش- هادامارد</p> <p>*نویسنده مسئول: محمد امیری پست الکترونیکی: amiri.mgh@gmail.com</p>



مقدمه

جستجوی تشابه بافتی، مسئله‌ای اساسی در بینایی کامپیوتر است که طیف وسیعی از کاربردهای مختلف را پوشش می‌دهد [۳-۱]. یادگیری ماشین، شامل طبقه‌بندی و خوشه‌بندی است. یکی از رویکردهایی که برای حل این مسئله، بسیار مورد مطالعه بوده است از طریق تقلیل مسئله جستجوی تشابه به اندازه‌گیری فاصله حرکت زمینی^۱ (EMD) است. در این نوشتار برای محاسبه EMD به صورت دقیق یا به صورت تقریبی راه‌حلهایی ارائه می‌شود. با توجه به پیچیدگی زمانی حل کامل مسئله EMD که از مرتبه $O(n^2)$ می‌باشد، حل تقریبی این مسئله مورد توجه قرار گرفته است [۴]. در این مقاله از یک الگوریتم با پیچیدگی زمانی $O(\log n)$ برای محاسبه EMD بین دو بردار ویژگی مستخرج از تصاویر استفاده شده است. در ابتدا مجموعه ویژگی‌های مستخرج از هر بافت پس از کاهش بُعد و تصویر از یک فضای ۶۴ بعدی به فضای دوبعدی، در یک بردار ℓ_1 نشان داده می‌شود. تشابه یا عدم تشابه بین دو بافت، با محاسبه فاصله ℓ_1 بین دو بردار محاسبه می‌گردد.

جای‌گذاری EMD در نرم ℓ_1 از طریق روش جزءبندی چهاردرخت^۲ در فضای اقلیدسی با ابعاد کم انجام می‌گیرد. برای این کار دو راه‌حل وجود دارد: الف) استخراج بردارهای ویژگی با ابعاد کم و سپس اعمال روش جزءبندی چهاردرخت. ب) استخراج بردارهای ویژگی با ابعاد زیاد و سپس اعمال تکنیک‌های کاهش ابعاد برای کاهش ابعاد بردار ویژگی با استفاده از قضیه جانسون-لیندنستراس^۳ (JL) [۵] و تبدیل آنها به بردارهایی با ابعاد کم و سپس اعمال روش جزءبندی چهاردرخت.

مشکلی که در روش «الف» وجود دارد این است که بردارهای ویژگی که با ابعاد کم از یک بافت استخراج شده‌اند، اطلاعات کافی از بافت ندارند و به‌طور کلی یک نماد یا نماینده ضعیفی از بافت هستند. مشکلی که در روش «ب» وجود دارد این است که قضیه JL، ابعاد بردارها را به $O(\log n)$ کاهش می‌دهد که در آن n تعداد بردارها است. زمان اجرای روش جزءبندی چهاردرخت، $O(2^d n \log n)$ است که در آن d ابعاد آن فضایی است که بردارها در آن قرار دارند که این ابعاد $O(\log n)$ است (پس از اعمال قضیه JL)، و بدین ترتیب، زمان اجرا به $poly(n)$ افزایش می‌یابد که همانند حل دقیق مسئله جستجوی تشابه بافت‌ها، به‌کندی انجام می‌گیرد.

علی‌رغم پیشرفت الگوریتم‌های یادگیری عمیق در سال‌های اخیر، به دلیل نیاز این شبکه‌ها به حجم داده زیاد و همچنین کاربرد بیشتر این شبکه‌ها در طبقه‌بندی تصاویر، استفاده از روش‌های مبتنی بر یادگیری عمیق متناسب مسائل طبقه‌بندی هستند تا بازیابی تصاویر در پایگاه داده.

در این مقاله، از طریق آزمایش‌هایی مشاهده می‌کنیم که برای مسئله یافتن تشابه بین بافت‌ها، می‌توانیم بردارهای ویژگی با ابعاد بالا را استخراج کنیم و سپس از تبدیل تبدیل والش-هادامارد برای تنک‌سازی این بردارهای استخراج شده استفاده کنیم و سپس از یک نسخه تُنک قضیه JL برای جای‌گذاری این بردارها در فضای اقلیدسی دوبعدی استفاده می‌کنیم. آزمایش‌های ما نشان می‌دهند که اگر ما بردارهای استخراج شده از یک بافت را توسط تبدیل والش-هادامارد پیش پردازش کنیم، کاهش ابعاد به دو بُعد، برای بافت‌های واقعی نسبتاً خوب است.

¹ Earth mover distance

² Quad-tree partitioning

³ Johnson-Lindenstrauss (JL)

پیشینه تحقیق

استخراج ویژگی‌های تصاویر بافت به‌منظور طبقه‌بندی، خوشه‌بندی یا بازیابی تصاویر بافت صورت می‌گیرد. برخی از این الگوریتم‌ها مبتنی بر استفاده از فیلتر گابور هستند و برخی هم مبتنی بر الگوی دودویی محلی^۱. در [۶] یک الگوریتم مقاوم به چرخش، شدت نور و مقیاس برای استخراج ویژگی با استفاده از فیلتر گابور برای بازیابی تصاویر پزشکی ارائه شده است. از تلفیق فیلتر گابور و ماتریس جهت لبه^۲ برای استخراج ویژگی با بعد کاهش‌یافته به‌منظور استفاده در طبقه‌بندی تصاویر بافت با استفاده از الگوریتم جنگل تصادفی در [۷] استفاده شده است. با استفاده هم‌زمان از دامنه و فاز فیلتر گابور در تحقیق کیم و همکاران [۸] نشان داده شده است که فیلتر گابور می‌تواند عملکرد بهتری نسبت به فیلتر الگوی دودویی محلی در طبقه‌بندی تصاویر بافت داشته باشد. الگوریتم دودویی محلی را نخستین بار اوجالا و همکاران [۹] در سال ۲۰۰۲ ارائه کردند. این بردار ویژگی برای هر پیکسل با استفاده از پیکسل‌های همسایگی در یک شعاع خاص ساخته می‌شود. تمام خانه‌هایی که مقدار آنها از پیکسل مرکزی بیشتر است مقدار +۱ و بقیه مقدار صفر را می‌گیرند. نسخه‌های مختلفی از این الگوریتم برای بازیابی تصاویر بافت مانند [۱۰]، بازیابی براساس محتوی و الگوریتم دودویی محلی [۱۱] و بازیابی محتوی براساس تلفیق الگوریتم دودویی و SIFT [۱۲] ارائه شدند.

استخراج بردار ویژگی با ابعاد بالا با استفاده از فیلتر گابور

فیلتر گابور که دنیس گابور^۴ [۱۳] توسعه داده است، فیلتری خطی است که برای آشکارسازی لبه در پردازش تصویر استفاده می‌شود. مطالعات نشان داده است که لایه اول بخش بینایی پستانداران مانند فیلتر گابور عمل می‌کند و به همین دلیل منطبق بودن بیولوژیکی بیشتر در مقایسه با سایر فیلترها، این فیلتر بیشتر از سایر فیلترها مورد توجه قرار گرفته است [۱۴] و [۱۵].

فیلترهای گابور دارای ویژگی محلی‌سازی هم در حوزه مکان و هم در حوزه فرکانس هستند و به همین دلیل برای بخش‌بندی تصاویر بافت‌ها [۶; ۱۶-۲۲] مناسب می‌باشند. در حوزه مکان، یک فیلتر گابور دُوبُعدی، یک تابع کرنل گوسی است که توسط موج سینوسی صفحه‌ای مدوله شده است.

موجک‌های گابور از طریق گسترش^۵ و چرخش^۶ موجک مادر (تابع گابور) به‌دست می‌آیند. شکل ۱ یک بانک فیلتر گابور با ۸ چرخش در حوزه مکان و ۵ گسترش در حوزه فرکانس را نشان می‌دهد.

¹ Local binary pattern

² Edge direction matrix

³ Scale-invariant feature transform

⁴ Dennis Gabor

⁵ Scale

⁶ Orientation

$f \backslash \theta$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{2\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{4\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{6\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$
0.25								
0.18								
0.13								
0.09								
0.06								

شکل ۱. بانک فیلتر گابور با ۸ زاویه چرخش و ۵ گسترش

در این مقاله از الگوریتم گابور به عنوان الگوریتم استخراج ویژگی استفاده می‌شود. به طور خاص، در یک بافت مشخص T با سایز $x \times y$ ، از یک فیلتر گابور برای استخراج n بردار ویژگی که هر کدام دارای d بعد می‌باشد، استفاده می‌کنیم.

الگوریتم پیشنهادی

الگوریتم پیشنهادی برای استخراج ویژگی از سه فیلتر گابور، تبدیل جانسون- لیندنستراس و والش- هادامارد استفاده می‌کند. فیلتر گابور برای استخراج ویژگی‌های مقاوم به چرخش و از تبدیل والش- هادامارد برای تنک‌سازی بردار ویژگی و بالاخره از تبدیل جانسون- لیندنستراس برای کاهش بعد استفاده شده است. هریک از این الگوریتم‌ها به تنهایی در کاربردهای مختلف استفاده شده‌اند اما در این مقاله از ترکیب این الگوریتم‌ها برای بازیابی تصاویر بافت استفاده شده است.

توضیح کلی الگوریتم پیشنهادی به صورت زیر است:

- ورودی: دو تصویر بافت T_1 و T_2 با سایز $x \times y$
 - استخراج دو مجموعه n تایی R و B از بردار ویژگی با بعد d به ترتیب از T_1 و T_2 با استفاده از فیلتر گابور
 - استخراج بردارهای ویژگی جدید R' و B' با بعد d' با استفاده از تبدیل والش- هادامارد در قضیه ۳ ($d' < d$)
 - اجرای الگوریتم EMD روی بردارهای B' و R' برای یافتن بردارهای VB' و VR'
 - فاصله ℓ_1 بین دو بردار VB' و VR' را به صورت $\|VR' - VB'\|_1$ بیان می‌کنیم که یک تقریب برای $EMD(R', B')$ است.
 - خروجی: مرتب‌سازی تصاویر برحسب میزان شباهت به تصویر اولیه برحسب فاصله $\|VR' - VB'\|_1$.
- از آن جایی که برای هر تصویر بافت ۱۶ تصویر مشابه در پایگاه داده وجود دارد، ارزیابی میزان کارایی الگوریتم‌های مختلف برحسب تعداد تصاویر مشابه درست در ۱۶ تصویر اول صورت می‌گیرد.

تکنیک کاهش ابعاد با استفاده از تبدیل والش- هادامارد

یکی از معایب فیلتر گابور برای مقایسه بین تصاویر برای پیدا کردن تصاویر مشابه در یک پایگاه داده تصاویر، زمان اجرای زیاد آن به دلیل ابعاد زیاد بردارهای ویژگی استخراج شده با این روش می‌باشد. برای حل این مسئله معمولاً از روش‌های کاهش بعد استفاده می‌شود.

یکی از تکنیک‌های قدیمی برای کاهش ابعاد، قضیه JL است [۵]. JL در یادگیری ماشین کاربردهای بسیاری دارد؛ از جمله: خوشه‌بندی [۲۳]، طبقه‌بندی [۲۴]، رگرسیون خطی [۲۵] و جریان داده‌ها [۲۶]. قضیه JL یک تبدیل خطی تصادفی است که برای یک بردار حقیقی دلخواه α با d بُعد در قضیه ۱ ضمیمه بیان شده است. با استفاده از این لم و اعمال یک اتحاد، قضیه جانسون- لیندنستراس را برای یک مجموعه از نقاط n در فضای اقلیدسی d بعدی خواهیم داشت. به صورت غیررسمی، قضیه JL بیان می‌کند که اگر یک مجموعه از نقاط P با سایز n را درون یک زیرفضای تصادفی S برای $s = O(\epsilon^{-2} \log d)$ جای‌گذاری کنیم، آن‌گاه تمام فواصل بین جفت نقاط، با فاکتور $(1 + \epsilon)$ تقریب زده خواهد شد.

نگاشت خطی تصادفی T در قضیه ۲ معمولاً با یک ماتریس S با ابعاد $s \times d$ تعریف می‌شود که در آن داریم:

$$T(a) = Sa$$

که برای مقیاس‌گذاری مناسب، در مقدار $\sqrt{d/s}$ ضرب می‌شود.

برای هرچه T ساختن S ، آلیون و چازلی [۲۷] نشان دادند که درایه‌های S مقدار صفر را با احتمال $1-q$ از توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $1/q$ به دست می‌آورد که در آن مقدار متغیر q برابر است با $\frac{(\log d)^{O(1)}}{d}$. ماتوسک در [۲۸] نشان داد که می‌توانیم درایه‌های S را حتی به صورت مؤثرتر، انتخاب کنیم. به طور خاص، ماتوسک قضیه ۳ ضمیمه را اثبات کرده است. از این قضیه در الگوریتم پیشنهادی استفاده می‌کنیم.

تعبیه EMD در نرم ℓ_1

برای مقایسه بین دو تصویر ابتدا باید بردار ویژگی از هر کدام از تصاویر استخراج شود و سپس فاصله بین آنها را اندازه‌گیری کرد. فاصله اقلیدسی و فاصله منتهن به عنوان دو روش فراگیر برای اندازه‌گیری فاصله بردارها در ریاضیات استفاده می‌شوند اما این روش‌ها برای مقایسه، تصاویر کارایی لازم را ندارند. یکی از الگوریتم‌های کارآمد برای اندازه‌گیری فاصله بردار ویژگی در تصاویر، روش EMD می‌باشد. این روش با پاسخ به این سؤال شروع می‌شود که حداقل کار لازم برای تبدیل یک توزیع به یک توزیع دیگر چقدر است؟ در ادامه به تشریح این الگوریتم به صورتی که در این مقاله مورد استفاده قرار گرفته است می‌پردازیم.

برای ساده‌تر بیان کردن این موضوع، فرض می‌کنیم که یک عدد حقیقی همیشه به عدد صحیح بعدی گرد می‌شود. علاوه بر این، فرض می‌کنیم که داده‌ها (نقاط) داده شده در یک شبکه^۱ با اندازه Δ هستند (برگرفته از مجموعه $\{0.1.2 \dots \Delta\}$)، در ظاهر، این مسئله یک محدودیت است اما می‌توان در بسیاری از کاربردها از جمله در بازیابی تصاویر از آن استفاده کرد. فرض می‌کنیم که Δ یک توان ۲ است. بدین ترتیب هر نقطه ورودی، در $[\Delta]^2$ قرار دارد. برای هر سلول c و هر مجموعه P از نقاط در صفحه، $P \cap c$ نشان‌دهنده مجموعه تمام نقاط در P است که در c قرار دارند (اشتراک). در سراسر این مقاله، معمولاً فرض می‌کنیم که یک سلول یک مربع در فضای \mathbb{R}^2 است، سپس برای هر سلول c ، ما طول جانبی c را با ℓ_c نشان می‌دهیم و تعداد نقاط P درون c را با $(n_c = |P \cap c|)$ نشان می‌دهیم.

¹ Grid

(a) جابه‌جایی تصادفی^۱ نقاط داخل هر سلول: فرض بر این است که هر شبکه به تعدادی زیرشبکه بدون هم‌پوشانی تقسیم می‌شود و داده‌ها (نقاط) در داخل این زیرشبکه‌ها قرار دارند. برای اطمینان از خصوصیات مناسب نقاط ورودی، فرض ما این است که این مرزهای بین شبکه‌ها به‌صورت تصادفی انتخاب می‌شوند.

برای تعریف مرز شبکه‌ها، ابتدا یک شبکه تودرتو $G_0 \dots G_i \dots G_{\log \Delta + 1}$ را در سلول ورودی $[2\Delta]^2$ قرار می‌دهیم (که اندازه آن دو برابر اندازه سلول اصلی است)؛ به‌طوری که طول جانبی یک سلول c در شبکه G_i ، $\ell_c = 2^i$ است. به عبارت دیگر، یک سلول G_{i+1} یک سلول G_i با طول جانبی $\ell_c = 2\Delta$ دارد و هر سلول c در G_i به چهار زیرسلول در G_{i-1} تبدیل می‌شود. سپس به‌طور تصادفی، مرز شبکه‌ها را تغییر می‌دهیم. برای این کار یک جفت عدد صحیح $a, b \in \{0, 1, \dots, \Delta\}$ را به‌صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم و سپس هر نقطه $p \in P$ را به اندازه بردار (a, b) جابه‌جا می‌کنیم. فرض ما این است که ما یک شماره‌گذاری منحصره‌فرد برای سلول‌ها در G_i داریم؛ به‌طوری که هنگامی که ما به یک سلول $G_i \in c$ رجوع می‌کنیم، منظور ما این است که این سلول برای $|G_i| \leq c \leq 1$ مطابق با این شماره‌گذاری، یک عدد منحصره‌فرد c دارد. ما چهار زیرسلول $G_i \in c$ که در شبکه G_{i-1} هستند را بچه‌های c ، و c را سلول والدین هریک از این چهار زیرسلول می‌نامیم.

جای‌گذاری^۲ (تعبیه): فرض کنید که ما دو مجموعه نقطه $R', B' \subseteq [\Delta]^2$ با تعداد n نقطه داریم. فاصله EMD بین R' و B' ، وزن حداقل تطابق وزنی بین R' و B' است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$EMD(R', B') = \min_{\pi: R' \rightarrow B'} \sum_{r \in R'} \|r - \pi(r)\|_2 \quad (۱)$$

که در آن حداقل یک نگاشت از R' به B' وجود دارد و $\|r - \pi(r)\|_2$ فاصله اقلیدسی بین یک نقطه r و نقطه نگاشت‌شده $\pi(r)$ است. ما به دنبال تقریب وزن حداقل تطابق وزنی بین R' و B' هستیم. برای این کار از الگوریتم‌های ارائه شده در [۶] و [۱۶] استفاده شده است که این الگوریتم محاسبه $EMD(R', B')$ را با تقریب $O(\log n)$ انجام می‌دهد. به عبارت دیگر:

$$EMD(R', B') \leq \text{Est}(R', B') \leq O(\log n) \cdot EMD(R', B') \quad (۲)$$

علی‌رغم این حقیقت که ضریب تقریب این الگوریتم در این تئوری از مرتبه $O(\log n)$ است، این الگوریتم در عمل بسیار خوب کار می‌کند. ما این الگوریتم را الگوریتم جای‌گذاری EMD در نرُم ℓ_1 می‌نامیم و در ادامه آن را توضیح خواهیم داد.

ورودی‌ها دو مجموعه نقاط $R', B' \subseteq [\Delta]^2$ با تعداد n نقطه هستند. خروجی‌ها دو بردار VR' و VB' هستند که فاصله ℓ_1 آنها $\|VR' - VB'\|_1$ یک تقریب $O(\log n)$ به $EMD(R', B')$ است. ما نحوه تشکیل VR' را تشریح می‌کنیم. نحوه ساختن VB' نیز به همین صورت است. بردار VR' یک بردار حقیقی دارای $n(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots)$ بُعدی است. n عنصر اول بردار متناظر با n سلول در G_0 هستند و به همین ترتیب برای بقیه. به عبارت دیگر می‌توان گفت:

$$VR' = \left(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{G_0}, \underbrace{x_{n+1}, \dots, x_{n+\frac{n}{4}}}_{G_1}, \dots, \underbrace{x_{n+\frac{n}{4}+\dots+\frac{n}{4^{i-1}}}, \dots, x_{n+\frac{n}{4}+\dots+\frac{n}{4^{i-1}}}}_{G_i}, \dots \right) \quad (۳)$$

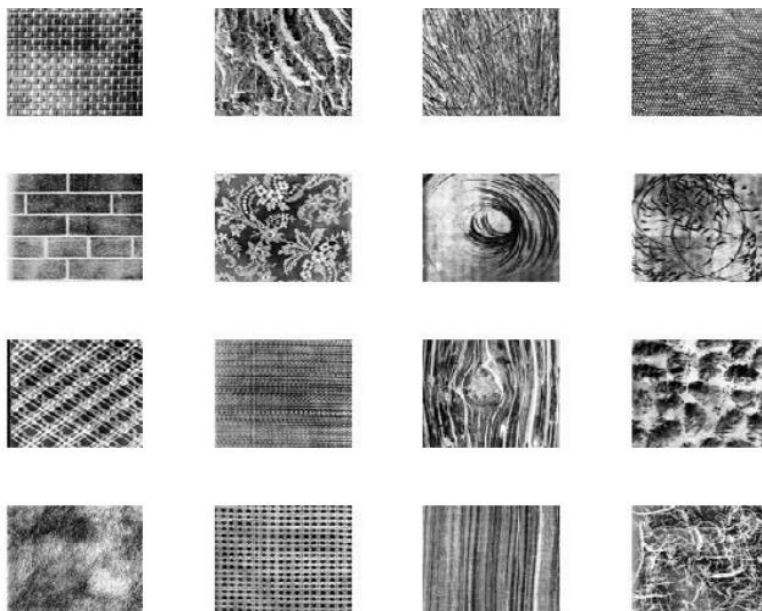
¹ Randomly shift

² Embedding

سپس با استفاده از قضیه ۴ ضمیمه می‌توان اثبات کرد که این تقریب، تقریب خوبی برای فاصله EMD می‌باشد.

نتایج آزمایش

برای ارزیابی کارایی الگوریتم پیشنهادی آزمایش‌های مختلفی انجام شده است و نتایج آنها را با سایر روش‌ها مقایسه شده است. برای آزمون تصاویر از پایگاه داده بروداتز [۲۹] که شامل ۱۱۲ تصویر بافت با ابعاد 512×512 می‌باشد استفاده شده است. در شکل ۲ تعدادی از این تصاویر بافت را می‌توان ملاحظه کرد. برای افزایش تعداد نمونه‌ها، هر تصویر به ۱۶ تصویر به ابعاد 128×128 تقسیم شده است. بنابراین تعداد کل تصاویر برابر ۱۷۹۲ شکل می‌باشد.

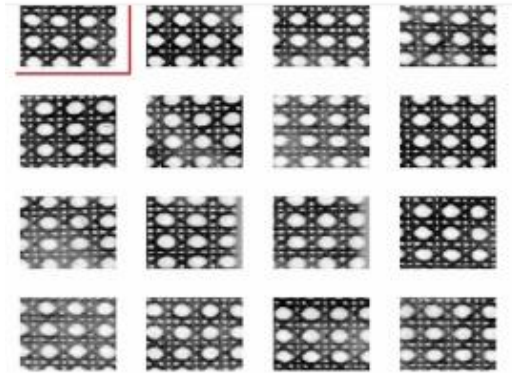


شکل ۲. ۱۶ بافت نمونه از ۱۱۲ بافت مورد مطالعه در این مقاله

در تمامی روش‌های زیر برای هر تصویر بافت T در پایگاه داده، ۱۶۹ بردار ویژگی که هر کدام از آنها $d = 64$ بُعد دارد استخراج شده است. آن‌گاه متناسب با هر روش این بردارهای ویژگی استخراج شده تغییراتی کرده‌اند. روش‌های زیر مورد مقایسه قرار گرفتند:

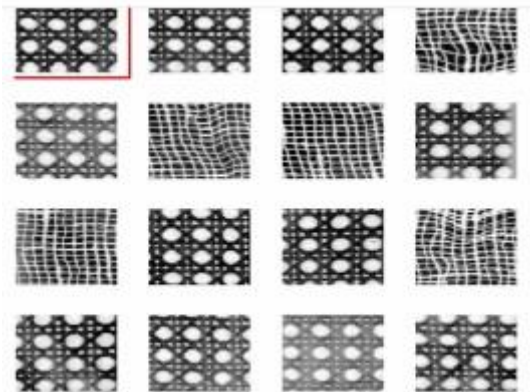
- روش ۱، گابور: برای هر بافت T در پایگاه داده، ۱۶۹ بردار ویژگی که هر کدام از آنها $d = 64$ بُعد دارد استخراج شده است. در این روش هیچ‌گونه کاهش بعدی انجام نشده است.
- این نتیجه در شکل ۲ نشان داده شده است. همان‌طور که در بین این ۱۵ زیربافت مشاهده می‌کنیم، هیچ‌گونه عدم تطابقی وجود ندارد.

نتیجه حاصل از جستجو در پایگاه داده در شکل ۳ نشان داده شده است. در تمامی مثال‌های این بخش تصویر اول سمت چپ، تصویر مورد پرس‌وجو^۱ می‌باشد. همان‌طور که در شکل نشان داده شده است هر ۱۶ تصویر پیدا شده صحیح است و نشان‌دهنده تطابق ۱۰۰ درصدی می‌باشد.



شکل ۳. نتیجه پرس‌وجو با استفاده از فیلتر گابور ۶۴ بُعدی

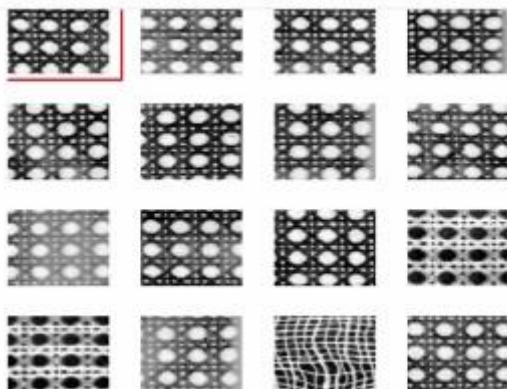
روش ۲، گابور تصادفی: به صورت تصادفی ۱۶۹ بردار استخراج‌شده را به یک زیرفضای دو بُعدی با $s = 2$ در قضیه ۲ سوق می‌دهیم. نتیجه حاصل در شکل ۴ نشان داده شده است. همان‌طور که در بین این ۱۵ تصویر بافت مشاهده می‌کنیم پنج عدم تطابق وجود دارد که نشان‌دهنده موفقیت ۶۶ درصدی در یافتن اشکال مشابه می‌باشد.



شکل ۴. روش گابور تصادفی

- روش ۳، گابور- هادامارد تصادفی: تبدیل والش- هادامارد را به بردارهایی که با استفاده از فیلتر گابور استخراج شده‌اند، اعمال می‌کنیم. در نهایت، به صورت تصادفی این ۱۶۹ بردار را به یک زیرفضای دو بُعدی سوق می‌دهیم. این دو مرحله با استفاده از قضیه ۳ برای $s = 2$ انجام می‌گیرد.

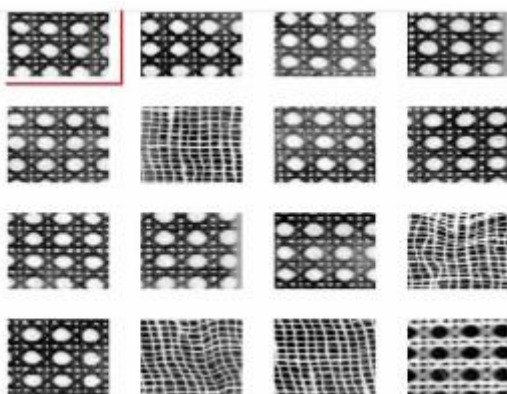
^۱ Query



شکل ۵. روش گابور- هادامارد تصادفی

شکل ۵ نتیجه این روش را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌کنیم یک عدم‌تطابق وجود دارد که نشان‌دهنده موفقیت ۹۳ درصدی در یافتن تصاویر مشابه است. مشاهده می‌شود که تنها تفاوت بین روش گابور تصادفی و گابور- هادامارد تصادفی این است که در روش سوم از تبدیل والش- هادامارد برای گسترش مختصات هر شکل استفاده می‌کنیم. با این حال، همان‌طور که در آزمایش‌هایمان مشاهده می‌کنیم، استفاده از تبدیل والش- هادامارد این امکان را برای ما فراهم می‌آورد تا ابعاد بردار نهایی را به ۲ کاهش دهیم که این مقدار بسیار کوچک‌تر از ابعاد بردار نهایی در قضیه ۳ است.

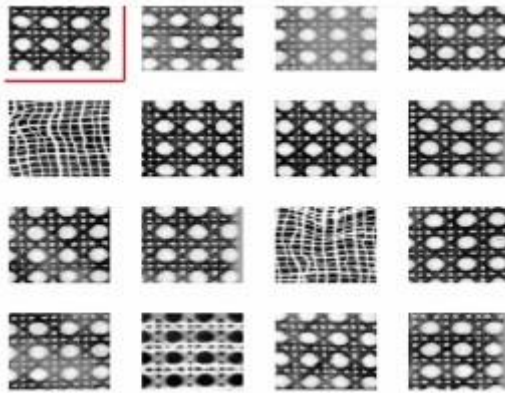
- روش ۴، گابور تصادفی EMD: به‌صورت تصادفی این ۱۶۹ بردار مستخرج را به یک زیرفضای دو بُعدی با $s = 2$ در قضیه ۲ سوق می‌دهیم. سپس از الگوریتم جای‌گذاری EMD در نرم ℓ_1 و قضیه ۴ استفاده می‌کنیم تا بردار ℓ_1 از هر بافت T را پیدا کنیم. مقایسه بین دو بافت T_1 و T_2 با استفاده از این رویکرد با محاسبه فاصله ℓ_1 بین دو بردار ℓ_1 که متناظر با بافت‌های T_1 و T_2 هستند انجام می‌گیرد.



شکل ۶. گابور تصادفی EMD

شکل ۶ نتیجه این روش را نشان می‌دهد. همان‌طور که در بین این ۱۵ تصویر مشاهده می‌کنیم چهار عدم تطابق وجود دارد که نشان‌دهنده موفقیت ۷۳ درصدی در یافتن زیربافت است.

• روش ۵، گابور- هادامارد تصادفی EMD: این روش، نتیجه اصلی است که متناظر با الگوریتم پیشنهادی در بخش ۲ می‌باشد. برای هر بافت T در پایگاه داده، ما ۱۶۹ بردار که هرکدام از آنها $d = 64$ بُعد دارد استخراج می‌کنیم. سپس تبدیل والش- هادامارد را به بردارهایی که با استفاده از فیلتر گابور استخراج شده‌اند، اعمال می‌کنیم. در نهایت، به‌صورت تصادفی این ۱۶۹ بردار را به یک زیرفضای دو بُعدی سوق می‌دهیم. این دو مرحله با استفاده از قضیه ۳ برای $s = 2$ انجام می‌گیرد. سپس از الگوریتم جای‌گذاری EMD در نُرم ℓ_1 و قضیه ۴ استفاده می‌کنیم تا بردار ℓ_1 از هر بافت T را پیدا کنیم. مقایسه بین دو بافت T_1 و T_2 با استفاده از این رویکرد با محاسبه فاصله ℓ_1 بین دو بردار که متناظر با بافت‌های T_1 و T_2 هستند انجام می‌گیرد.



شکل ۷. الگوریتم پیشنهادی: گابور- هادامارد تصادفی EMD

همان‌طور که در بین این ۱۵ تصویر مشاهده می‌کنیم دو عدم تطابق وجود دارد که نشان‌دهنده موفقیت ۸۶ درصدی در یافتن زیربافت است. مشاهده می‌شود که تفاوت بین روش گابور- هادامارد تصادفی و روش گابور- هادامارد تصادفی EMD این است که ما از الگوریتم جای‌گذاری EMD در نُرم ℓ_1 و قضیه ۴ استفاده می‌کنیم تا بردار ℓ_1 را بر هر بافت T پیدا کنیم. مقایسه بین دو بافت T_1 و T_2 با استفاده از این رویکرد با محاسبه فاصله ℓ_1 بین دو بردار ℓ_1 که متناظر با بافت‌های T_1 و T_2 هستند انجام می‌گیرد. الگوریتم‌های شناخته‌شده بسیاری برای حل این مسئله با نُرم ℓ_1 وجود دارد، و با کاهش جستجوی تشابه بین بافت‌ها برای محاسبه فاصله ℓ_1 بین بردارها، این امکان برای ما فراهم می‌شود تا این مسئله را سریع‌تر حل کنیم. به‌طور خاص، به‌منظور حل دقیق جستجوی تشابه، ما به زمان $O(n^2)$ نیاز داریم، درحالی‌که با استفاده از کاهش به فاصله ℓ_1 از طریق کاهش EMD، این مسئله در زمان $O(n \log n)$ به‌طور تقریبی حل می‌شود و آزمایش‌های ما نشان می‌دهند که این تقریب برای داده‌های حقیقی مانند بافت‌ها نسبتاً خوب است. شایان ذکر است که درصد صحت اندازه‌گیری شده فقط برای یکی از ۱۶ عضو از ۱۱۲ گروه بافت می‌باشد. همچنین با توجه به اینکه یکی از ۱۶ تصویر، خود تصویر تحت بازایی می‌باشد، در اندازه‌گیری به میزان یک شانزدهم افسست وجود دارد. در جدول ۱ دقت این چهار روش آمده و با هم مقایسه شده است.

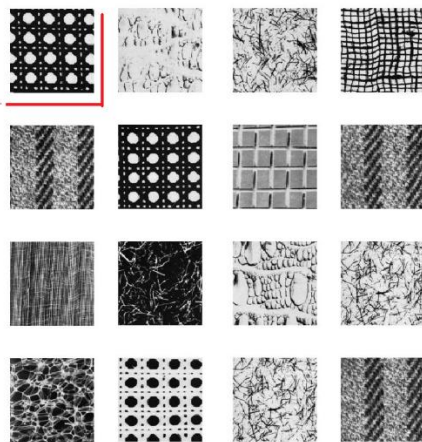
جدول ۱. مقایسه میزان دقت الگوریتم‌های مختلف

نوع الگوریتم	دقت به دست آمده بر حسب درصد
گابور بدون کاهش بعد	۱۰۰
گابور تصادفی	۶۶
گابور- هادامارد تصادفی	۹۳
گابور تصادفی EMD	۷۳
گابور- هادامارد تصادفی EMD	۸۶
جستجوی دودویی محلی (نسخه ساده)	۱۹
جستجوی دودویی محلی (نسخه توسعه یافته) [۳۰]	۵۰

مقایسه الگوریتم پیشنهادی با سایر الگوریتم‌ها

برای مقایسه الگوریتم پیشنهادی با سایر الگوریتم‌ها، الگوریتم جستجوی دودویی محلی که یکی از پرکاربردترین الگوریتم‌ها در زمینه پردازش تصویر می‌باشد را آزمایش کردیم. این الگوریتم را ابتدا در سال ۲۰۰۲ اوپا و همکاران ارائه کردند [۹] اما در سال‌های بعد نسخه توسعه یافته این الگوریتم به عنوان یکی از پرکاربردترین الگوریتم‌ها در این زمینه مورد استفاده قرار گرفت [۳۱].

برای مقایسه درست، از همان تصویر مورد آزمایش بخش قبل و با همان ابعاد استفاده شده است. برای استفاده از این الگوریتم، از تابع از پیش آماده شده نرم افزار متلب و با همان مقادیر پیش فرض برای پارامترهای مورد نیاز، استفاده شده است. نتیجه اجرای این الگوریتم در شکل ۸ نشان داده شده است.



شکل ۸. نتیجه اجرای الگوریتم جستجوی دودویی

در بین ۱۵ تصویر اول، تنها دو تصویر مشابه تصویر مورد جستجو می‌باشد. دلیل این مسئله این است که بسیاری از الگوریتم‌ها برای مسائلی مانند طبقه بندی و خوشه بندی مناسب هستند اما در مسئله بازیابی تصاویر به دلیل اینکه هیچ داده‌ای برای آموزش وجود ندارند، کارایی لازم را ندارند. در تحقیق دوشی و همکاران [۳۲] که روی بانک داده Outex انجام شده نشان داده شده است که نسخه اولیه الگوریتم جستجوی دودویی، کارایی بهتری نسبت به سایر

نسخه‌های این الگوریتم در مسئله بازیابی تصاویر بافت دارد. در تحقیق ستوده و همکاران [۳۰] که در سال ۲۰۱۹ روی چهار پایگاه داده مختلف انجام شده است نیز با استفاده از نسخه توسعه‌یافته این الگوریتم به میانگین دقتی حدود ۵۰ درصد در بازیابی تصاویر دست یافتند در حالی که دقت به‌دست‌آمده در این تحقیق به‌صورت میانگین ۸۶ درصد بوده است.

در تحقیق کیم و همکاران [۸] در سال ۲۰۱۸ نیز نشان داده شده است که در صورت استفاده درست از فیلتر گابور، کارایی این الگوریتم بهتر از الگوریتم جستجوی دودویی محلی است. در جدول ۲ مقایسه‌ای بین روش‌های مختلف بازیابی بافت از نظر روش‌های مورداستفاده صورت گرفته است.

جدول ۲. مقایسه الگوریتم‌های مختلف بازیابی تصاویر بافت از نظر روش اجرا

روش اجرا	نوع الگوریتم
تلفیق الگوریتم جستجوی دودویی و هستوگرام	طبقه‌بندی بافت مقاوم به چرخش و چند تفکیکی با جستجوی دودویی [۹]
تلفیق فیلتر گابور و ماتریس تشخیص لبه	روش تلفیقی گابور و تشخیص لبه برای تشخیص شکل و بافت [۷]
گرادینان تصادفی نزولی	تشخیص خودکار ناهنجاری بافت روکش آسفالت [۳]
تلفیق فیلتر گابور و جستجوی دودویی محلی	تشخیص بیماری گیاهان با آنالیز بافت برگ [۱۹]
تلفیق موجک گابور و تابع مفصل گوسی	بازیابی تصاویر بافت رنگی [۱۷]
تلفیق جستجوی دودویی محلی و هستوگرام رنگی	طبقه بندی و بازیابی تصاویر بافت با هستوگرام رنگی و جستجوی دودویی [۱۰]
فیلتر گابور و بردار انسجام رنگ	بازیابی تصاویر براساس محتوی
تلفیق فیلتر گابور و تبدیل والش و الگوریتم تقریب فاصله	روش پیشنهادی

نتیجه گیری

در این مقاله الگوریتم‌های مختلفی برای پیدا کردن تصاویر بافت مشابه در یک پایگاه داده مطالعه شد. همان‌طور که انتظار می‌رفت فیلتر گابور، کارایی خود را برای پیدا کردن تصاویر مشابه نشان داده است اما از آنجایی که استفاده مستقیم از این فیلتر دارای پیچیدگی زمانی زیادی است، روش‌هایی برای کاهش ابعاد بردارهای ویژگی حاصل از اعمال فیلتر گابور بر تصاویر، مطالعه شد و کارایی الگوریتم پیشنهادی که با استفاده از تبدیل والش - هادامارد بردارهای ۶۴ بعدی را به دو بعد تبدیل می‌کرد و در نهایت، محاسبه فاصله بردارهای دو بعدی با الگوریتم تقریبی EMD اثبات شد. زمان اجرای الگوریتم پیشنهادی برای محاسبه فاصله دو تصویر از مرتبه $O(n^2)$ به مرتبه $O(n \log n)$ نیز کاهش یافت. تحقیق حاضر نشان داده است که ممکن است الگوریتم‌هایی برای طبقه‌بندی تصاویر بافت مناسب باشند و نتایج خوبی داشته باشند ولی برای بازیابی مناسب نباشند. نوآوری تحقیق حاضر شامل استفاده از چند الگوریتم مختلف است که در موارد دیگر کاربرد داشته‌اند اما در این پژوهش برای پیدا کردن تشابه تصاویر بافتی استفاده شدند.

References

- [1] DeCost, B. L., Francis, T., & Holm, E. A. (2017). Exploring the microstructure manifold: Image texture representations applied to ultrahigh carbon steel microstructures. *Acta Materialia*, 133, 30-40. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2017.05.014>
- [2] Farwell, L. S., Gudex-Cross, D., Anise, I. E., Bosch, M. J., Olah, A. M., Radeloff, V. C., Razenkova, E., Rogova, N., Silveira, E. M. O., Smith, M. M., & Pidgeon, A. M. (2021). Satellite image texture captures vegetation heterogeneity and explains patterns of bird richness. *Remote Sensing of Environment*, 253, 112175. <https://doi.org/10.1016/j.rse.2020.112175>

- [3] Hoang, N.-D. (2019). Automatic detection of asphalt pavement raveling using image texture based feature extraction and stochastic gradient descent logistic regression. *Automation in Construction*, 105, 102843. <https://doi.org/10.1016/j.autcon.2019.102843>
- [4] Grauman, K., & Darrell, T. (2007). The Pyramid Match Kernel: Efficient Learning with Sets of Features. *Journal of Machine Learning Research*, 8, 725-760. <https://dl.acm.org/doi/10.5555/1248659.1248685>
- [5] Johnson, W. B. (1984). Extensions of Lipschitz mappings into Hilbert space. *Contemporary mathematics*, 26, 189-206. <https://doi.org/10.1090/conm/026/737400>
- [6] Veerashetty, S., & Patil, N. (2019). Design of rotation, illumination, and scale invariant Gabor texture descriptor for image texture analysis and retrieval. *International Journal of Computers and Applications*, 43, 1-9. <https://doi.org/10.1080/1206212X.2019.1658378>
- [7] Sahib, Z. A., Uçan, O. N., Talab, M. A., Alnaseeri, M. T., Mohammed, A. H., & Sahib, H. A. (2020, June 26-28). *Hybrid Method Using EDMS & Gabor for Shape and Texture*. 2020 International Congress on Human-Computer Interaction, Optimization and Robotic Applications (HORA), Ankara, Turkey. <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/9152829/>
- [8] Kim, N. C., & So, H. J. (2018). Directional statistical Gabor features for texture classification. *Pattern Recognition Letters*, 112, 18-26. <https://doi.org/10.1016/j.patrec.2018.05.010>
- [9] Ojala, T., Pietikainen, M., & Maenpaa, T. (2002). Multiresolution gray-scale and rotation invariant texture classification with local binary patterns. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 24(7), 971-987. <https://doi.org/10.1109/TPAMI.2002.1017623>
- [10] Liu, P., Guo, J.-M., Chamnongthai, K., & Prasetyo, H. (2017). Fusion of color histogram and LBP-based features for texture image retrieval and classification. *Information Sciences*, 390, 95-111. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2017.01.025>
- [11] Garg, M., & Dhiman, G. (2021). A novel content-based image retrieval approach for classification using GLCM features and texture fused LBP variants. *Neural Computing and Applications*, 33(4), 1311-1328. <https://doi.org/10.1007/s00521-020-05017-z>
- [12] Yuan, X., Yu, J., Qin, Z., & Wan, T. (2011). *A SIFT-LBP image retrieval model based on bag of features*. 2011 18th IEEE International Conference on Image Processing, <https://www.semanticscholar.org/paper/A-SIFT-LBP-IMAGE-RETRIEVAL-MODEL-BASED-ON-Yuan-Yu/a90bf09e362b7902d68e37aee6389f2a16e3aa47>
- [13] Gabor, D. (1946). Theory of communication. Part 1: The analysis of information. *Journal of the Institution of Electrical Engineers - Part III: Radio and Communication Engineering*, 93(26), 429-441.
- [14] Daugman, J. G. (1985). Uncertainty relation for resolution in space, spatial frequency, and orientation optimized by two-dimensional visual cortical filters. *Journal of the Optical Society of America A*, 2(7), 1160-1169. <https://doi.org/10.1364/JOSAA.2.001160>
- [15] Marcelja, S. (1980). Mathematical description of the responses of simple cortical cells. *J Opt Soc Am*, 70(11), 1297-1300. <https://doi.org/10.1364/josa.70.001297>
- [16] Kassis, M., & El-Sana, J. (2016, Oct 23-26). *Scribble Based Interactive Page Layout Segmentation Using Gabor Filter*. 2016 15th International Conference on Frontiers in Handwriting Recognition (ICFHR), Shenzhen, China. <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/7814032>

- [17] Li, C., Huang, Y., & Zhu, L. (2017). Color texture image retrieval based on Gaussian copula models of Gabor wavelets. *Pattern Recognition*, 64, 118-129. <https://doi.org/10.1016/j.patcog.2016.10.030>
- [18] Madhavi, D., & Patnaik, M. R. (2018). Genetic algorithm-based optimized gabor filters for content-based image retrieval. In *Intelligent communication, control and devices* (pp. 157-164). Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-10-5903-2_18
- [19] Patil, J. K., & Kumar, R. (2017). Analysis of content based image retrieval for plant leaf diseases using color, shape and texture features. *Engineering in Agriculture, Environment and Food*, 10(2), 69-78. <https://doi.org/10.1016/j.eaef.2016.11.004>
- [20] Sahib, Z. A., Uçan, O. N., Talab, M. A., Alnaseeri, M. T., Mohammed, A. H., & Sahib, H. A. (2020, 26-28 June 2020). *Hybrid Method Using EDMS & Gabor for Shape and Texture*. 2020 International Congress on Human-Computer Interaction, Optimization and Robotic Applications (HORA) ,
- [21] Samantaray, A. K., & Rahulkar, A. D. (2020). New design of adaptive Gabor wavelet filter bank for medical image retrieval. *IET Image Processing*, 14(4), 679-687. <https://digital-library.theiet.org/content/journals/10.1049/iet-ipr.2019.1024>
- [22] Singh, J., Bajaj, A., Mittal, A., Khanna, A., & Karwayun, R. (2018, Dec 14-15) . *Content Based Image Retrieval using Gabor Filters and Color Coherence Vector*. 2018 IEEE 8th International Advance Computing Conference (IACC), Greater Noida, India <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/8692123>
- [23] Feldman, D., Monemizadeh, M., & Sohler, C. (2007, June 6-8). *A PTAS for k-means clustering based on weak coresets*. Proceedings of the twenty-third annual symposium on Computational geometry, Gyeongju South Korea. <https://dl.acm.org/doi/abs/10.1145/1247069.1247072>
- [24] Arriaga ,R. I., & Vempala, S. (2006). An algorithmic theory of learning: Robust concepts and random projection. *Machine learning*, 63(2), 161-182. <https://doi.org/10.1109/SFFCS.1999.814637>
- [25] Dasgupta, A., Kumar, R., & Sarlós, T. (2010, June 5-8). *A sparse johnson: Lindenstrauss transform*. Proceedings of the forty-second ACM symposium on Theory of computing, Ithaca, New York. <https://dl.acm.org/doi/abs/10.1145/1806689.1806737>
- [26] Clarkson, K. L., & Woodruff, D. P. (2017). Low-rank approximation and regression in input sparsity time. *Journal of the ACM (JACM)*, 63(6), 1-45. <https://doi.org/doi.org/10.1145/3019134>
- [27] Alon, N., Matias, Y., & Szegedy, M. (1999). The Space Complexity of Approximating the Frequency Moments. *Journal of Computer and System Sciences*, 58(1), 137-147. <https://doi.org/10.1006/jcss.1997.1545>
- [28] Ailon, N., & Chazelle, B. (2009). The fast Johnson–Lindenstrauss transform and approximate nearest neighbors. *SIAM Journal on computing*, 39(1), 302-322. <https://doi.org/10.1137/060673096>
- [29] Abdelmounaime, S., & Dong-Chen, H. (2013). New Brodatz-Based Image Databases for Grayscale Color and Multiband Texture Analysis. *ISRN Machine Vision*, 2013, 876386. <https://doi.org/10.1155/2013/876386>
- [30] Sotoodeh, M., Moosavi, M., & Boostani, R. (2019) .A Novel Adaptive LBP-Based Descriptor for Color Image Retrieval. *Expert systems with Applications*, 127, 342-352. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2019.03.020>

- [31] Dolly, B., & Raj, D. (2021). Texture Based Image Retrieval Using GLCM and LBP. In *International Conference on Intelligent and Smart Computing in Data Analytics: ISDA 2020* (pp. 35-45). Springer Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-33-6176-8_5
- [32] Doshi, N. P., & Schaefer, G. (2012, Nov 11-15). *A comprehensive benchmark of local binary pattern algorithms for texture retrieval*. Proceedings of the 21st International Conference on Pattern Recognition (ICPR2012), Tsukuba, Japan <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/6460737>
- [33] Matoušek, J. (2008). On variants of the Johnson–Lindenstrauss lemma. *Random Structures & Algorithms*, 33(2), 142-156. <https://doi.org/10.1002/rsa.20218>
- [34] Arora, S. (1998). Polynomial time approximation schemes for Euclidean traveling salesman and other geometric problems. *Journal of the ACM (JACM)*, 45(5), 753-782. <https://doi.org/10.1145/290179.290180>
- [35] Charikar, M. S. (2002, May). *Similarity estimation techniques from rounding algorithms*. Proceedings of the thirty-fourth annual ACM symposium on Theory of computing, Montreal, Quebec, Canada. <https://doi.org/10.1145/509907.509965>
- [36] Grauman, K., & Darrell, T. (2005, Oct 17-21). *The pyramid match kernel: discriminative classification with sets of image features*. Tenth IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV'05) Volume 1, Beijing, China. <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/1544890>

ضمائم:

قضیه ۱ (کاهش ابعاد در L2) (۵): فرض کنید که α یک بردار دلخواه در \mathbb{R}^n است. فرض کنید که $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^s$ نشان دهنده‌ی یک نگاشت خطی تصادفی ناشی از توزیع احتمالی مناسب F است که بعداً تعیین می‌شود. فرض کنید $X_1 = |T(a)_1|^2$ و به همین ترتیب $X_s = |T(a)_s|^2$ آنگاه داریم:

$$\Pr [(1 - \varepsilon)Z \leq X_1 + \dots + X_s \leq (1 + \varepsilon)Z] \geq 1 - \delta \quad (۴)$$

قضیه ۲ (۵): فرض کنید $0 < \varepsilon \leq 1/2$ و $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ مجموعه n نقطه در فضای \mathbb{R}^d است. هم چنین فرض کنید که $s = C \varepsilon^{-2} \log d$ باشد که در آن C ثابتی است که به اندازه‌ی کافی بزرگ است. سپس، نگاشت خطی $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^s$ از قضیه‌ی ۱ با احتمال حداقل 1/2، نامعادله‌ی زیر را برای تمام $i, j \in [n]$ برآورده می‌کند:

$$(1 - \varepsilon)\|p_i - p_j\| \leq \|T(p_i) - T(p_j)\| \leq (1 + \varepsilon)\|p_i - p_j\| \quad (۵)$$

که در نامعادله بالا $\|\cdot\|$ نشان‌دهنده‌ی فاصله‌ی اقلیدسی است.

قضیه ۳ (۳۳): فرض کنید که a نشان‌دهنده‌ی بردار واحد در \mathbb{R}^d است که شرط $\|a\|_\infty \leq \alpha$ را برآورده می‌کند که در آن $a \in [1/\sqrt{\alpha}, 1]$ و فرض کنید که $Z_i = |a[i]|^2$ برای $i \in [d]$ و $Z = Z_1 + \dots + Z_d$ هم فرض کنید که داشته باشیم $S = C \varepsilon^{-2} \log(4/\delta)$ که در آن C یک ثابت مناسب است. فرض کنید که $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^s$ نشان دهنده‌ی یک نگاشت خطی تصادفی است که توسط $T(a)_i = 1/\sqrt{s} \sum_{j=1}^d s[i,j] \times a[j]$ برای $i = 1, 2, \dots, s$ تعریف می‌شود، که در آن $s[i,j]$ متغیرهای تصادفی مستقل هستند، بگونه‌ای که $S[i,j] = 0$ با احتمال $1 - q$ است که در آن مقدار $1/\sqrt{q}$ و $1/\sqrt{q}$ با احتمال $q/2$ و $-1/\sqrt{q}$ با احتمال $q/2$ است.

متغیر q برابر $C\alpha^2 \log(d/(\varepsilon\delta))$ می‌باشد. هم چنین فرض کنید $X_1 = |T(a)_1|^2$ و به همین ترتیب $X_s = |T(a)_s|^2$ ، و بنابر این داریم:

$$\Pr[1 - \varepsilon) Z \leq X \leq (1 + \varepsilon)Z] \geq 1 - \delta \quad (6)$$

قضیه ۴ ([۳۶-۳۴]): فرض کنید که $R', B' \subseteq [\Delta]^2$ دو مجموعه با n نقطه باشند به گونه‌ای که $n = 4^k$ ، توانی از ۴ باشد. فرض کنید که ما بصورت تصادفی مجموعه‌ی شبکه‌ی تو در تو $G_0, \dots, G_i, \dots, G_{\log \Delta+1}$ را در سلول ورودی $[2\Delta]^2$ تغییر می‌دهیم. VR' و VB' دو بردار خروجی هستند با استفاده از الگوریتم جایگذاری EMD در نُرم ℓ_1 ساخته شده‌اند. سپس داریم:

$$EMD(R', B') \leq \|VR' - VB'\|. \quad E[\|VR' - VB'\|] \leq 2 \log \Delta EMD(R', B') \quad (7)$$

که در آن E ، امید ریاضی برای برای مجموعه‌ی شبکه‌ی تو در تو $G_0, \dots, G_i, \dots, G_{\log \Delta+1}$ است که به صورت تصادفی به اندازه بردار (a, b) جابجا شده اند که این بردار با انتخاب یک زوج عدد صحیح مستقل و یکنواخت از مجموعه $\{0, 1, \dots, \Delta\}$ بصورت تصادفی انتخاب می‌شود.