



Investigating the Metric Dimension of an Intersection Graph in a Commutative Ring

Reza Nikandish^{1*}

¹Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Jundi-Shapur University of Technology, Dezful, Iran.

ARTICLE INFO

Received: 01.28.2020

Revised: 01.18.2021

Accepted: 01.18.2021

Keyword:

Metric dimension

Resolving set

Metric basis Intersection graph

Ideal

Commutative ring

ABSTRACT

Suppose R is a uniform commutative ring. The R -dependent intersection graph, represented by the symbol $G(R)$, is a simple, directionless graph whose set of vertices is the set of all non-trivial ideals of R and two distinct vertices I, J are joined if and only if $I \cap J \neq (0)$. In this paper, the metric dimension of intersection graphs associated with commutative rings is examined and some metric dimension formulas for intersection graphs are provided.

*Corresponding Author:

Reza Nikandish

Email: r.nikandish@ipm.ir





دانشگاه فنی و حرفه‌ای
ایران

کارافن

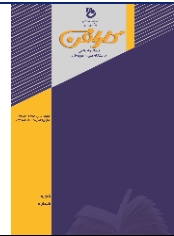
فصلنامه علمی دانشگاه فنی و حرفه‌ای

زمستان ۱۳۹۹، دوره ۱۷، شماره ۴، ۴۴-۳۵

آدرس نشریه: <https://karafan.tvu.ac.ir/>

doi:10.48301/KSSA.2021.128394

20.1001.1.23829796.1399.17.4.2.0



شاپای الکترونیکی: ۲۵۳۸-۴۴۳۰

شاپای چاپی: ۲۳۸۲-۹۷۹۶

مقاله پژوهشی

بررسی بعد متریکی گراف اشتراک در یک حلقه جابه‌جایی

رضا نیک‌اندیش*

۱- استادیار، دپارتمان ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه صنعتی جندی شاپور، دزفول، ایران.

چکیده	اطلاعات مقاله
<p>فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی و یک‌دار باشد. گراف اشتراک وابسته به حلقه R که با نماد $G(R)$ نمایش می‌دهیم، گرافی ساده و بدون جهت است که مجموعه رئوس آن تمام ایده‌آل‌های نابدهی حلقه R است و دو رأس مجزای I و J با هم مجاور هستند اگر و تنها اگر $I \cap J \neq (0)$. در این مقاله بعد متریکی گراف‌های اشتراک وابسته به حلقه‌های جابه‌جایی را بررسی می‌کنیم و فرمول‌هایی برای بعد متریکی گراف‌های اشتراک ارائه می‌شود.</p>	<p>دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۱۱/۰۸ بازنگری مقاله: ۱۳۹۹/۱۰/۲۹ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۱۰/۲۹</p>
	<p>کلید واژگان: بعد متریکی مجموعه تجزیه پایه متریک گراف اشتراک ایده‌آل حلقه جابه‌جایی</p>
	<p>*نویسنده مسئول: رضا نیک‌اندیش پست الکترونیکی: r.nikandish@ipm.ir</p>



© 2021 Technical and Vocational University, Tehran, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-Noncommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

مقدمه

در سال‌های اخیر، مطالعه گراف‌های وابسته به حلقه‌ها، به یکی از مسائل جذاب در ترکیبیات جبری تبدیل شده است. بررسی خاصیت‌های گرافی، منجر به پیدایش خواص حلقه‌ها می‌شود. برای مثال می‌توان منابع [۴-۱] را نام برد. یکی از مسائلی که در این راستا بررسی می‌شود همان بعد متریکی گراف‌های وابسته به حلقه‌های جابه‌جایی است. این مفهوم، اولین بار در [۵] تعریف شده است. در [۴] بعد متریکی یکی از گراف‌های وابسته به حلقه‌ها محاسبه و بررسی شده است. در این مقاله، بعد متریکی گراف اشتراک وابسته به حلقه‌های جابه‌جایی را مطالعه می‌کنیم. در این مقاله، تمام حلقه‌ها جابه‌جایی و یک‌دار فرض می‌شوند و با R نمایش داده می‌شوند. حلقه R را کاهشی گویند هرگاه صفر آن تنها عنصر پوچ توان آن باشد در غیر این صورت آن را غیرکاهشی گویند. همچنین $Max(R)$ نشان‌دهنده مجموعه ایده‌آل‌های ماکسیمال R است. برای آشنایی تعاریف بیشتر در باره حلقه‌ها خواننده می‌تواند به [۶] مراجعه کند.

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف باشد که در آن $V = V(G)$ مجموعه رئوس و $E = E(G)$ مجموعه یال‌ها است. یک گراف را هم‌بند گویند هرگاه بین هر دو رأس آن مسیر وجود داشته باشد. فرض کنید G یک گراف و x, y دو رأس متمایز از آن باشد. در این صورت کوتاه‌ترین مسیری که بین x و y وجود دارد را فاصله این دو رأس گویند و با $d(x, y)$ نمایش می‌دهند. همچنین قطر گراف G را که با $diam(G)$ نمایش می‌دهند برابر است با:

$$diam(G) = \sup\{d(u, v) \mid u, v \in V(G)\}.$$

فرض کنید G یک گراف باشد. مجموعه مرتب $S = \{V_1, V_2, \dots, V_k\} \subseteq V(G)$ را در نظر می‌گیریم. برای هر رأس $v \in V(G) \setminus S$ بردار $D(v|S) = (d(v, v_1), \dots, d(v, v_k))$ را متناظر می‌کنیم. مجموعه S را یک مجموعه تجزیه برای G گویند هرگاه هر رأس $v \in V(G) \setminus S$ دارای بردار متناظر متمایز باشد. به عبارت دیگر اگر $u, v \in V(G) \setminus S$ به طوری که داشته باشیم $D(u|S) = D(v|S)$ ، نتیجه شود که $u = v$. مجموعه تجزیه S از گراف G را که در بین تمام مجموعه‌های تجزیه G دارای کمترین تعداد عناصر باشد، را یک پایه متریک برای G نامند و تعداد عناصر این پایه را بعد متریکی گراف G گویند و با $dim_M(G)$ نمایش می‌دهند. برای نمادها و تعاریف بیشتر خواننده می‌تواند به [۴؛ ۷] مراجعه کند.

فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی و یک‌دار باشد. گراف اشتراک وابسته به حلقه R که با نماد $G(R)$ نمایش می‌دهیم، گرافی است که مجموعه رئوس آن تمام ایده‌آل‌های نابديهی حلقه R است و دو رأس I و J با هم مجاور هستند اگر و تنها اگر $I \cap J \neq (0)$. این گراف اولین بار در [۸] تعریف و به حلقه‌های جابه‌جایی وابسته شده است. در این مقاله بعد متریکی گراف‌های اشتراک وابسته به حلقه‌های جابه‌جایی را بررسی می‌کنیم و فرمول‌هایی برای به‌دست آوردن بعد متریکی این گراف ارائه می‌دهیم.

بعد متریکی گراف در حلقه‌های کاهشی

در این بخش، بعد متریکی گراف اشتراک را در حلقه‌های کاهشی به‌دست می‌آوریم. ابتدا نشان می‌دهیم که بعد متریکی گراف اشتراک متناهی است اگر و تنها اگر R تعداد متناهی ایده‌آل داشته باشد.

لم ۱-۲. فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت گراف $G(R)$ هم‌بند است مگر آنکه R بصورت حاصل ضرب دو میدان باشد. علاوه بر این، در صورت هم‌بندی گراف، $diam(G(R)) \in \{0, 1, 2\}$.

اثبات: فرض کنید R بصورت حاصل ضرب دو میدان نباشد. فرض کنید I و J دو رأس متمایز از گراف $G(R)$ باشند به طوری که I و J مجاور نباشند. اگر $I + J \neq R$ ، آنگاه مسیر $I - I + J - J$ نشان می‌دهد که $d(I, J) = 2$.

اگر $R = I + J$ ، آن گاه با توجه به اینکه $I \cap J = (0)$ ، نتیجه می شود که $R = I \oplus J$. چون R به صورت حاصل ضرب دو میدان نیست، می توان ایده آل $K = I \oplus J'$ را طوری انتخاب کرد که $J' \subset J$ و $J' \neq (0)$. حال به راحتی می توان دید که $I - K - J$ یک مسیر به طول ۲ از I به J می باشد.

قضیه ۲-۲. فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت $\dim_M(G(R)) < \infty$ اگر و تنها اگر R تعداد متناهی ایده آل داشته باشد.

اثبات: یک طرف حکم بدیهی است؛ زیرا اگر R تعداد متناهی ایده آل داشته باشد، آن گاه به طور بدیهی بعد متریکی آن متناهی است.

برعکس، فرض کنید که بعد متریکی گراف $G(R)$ متناهی باشد، نشان می دهیم که R تعداد متناهی ایده آل دارد. چون بعد متریکی گراف $G(R)$ متناهی است، فرض کنید که $S = \{x_1, \dots, x_k\}$ یک پایه متریک برای $G(R)$ باشد که در آن k یک عدد صحیح و مثبت است. چون $\text{diam}(G(R)) \in \{0, 1, 2\}$ ، نتیجه می شود که هر مؤلفه بردار $D(I|S)$ فقط ۳ حالت ممکن را دارد و لذا تعداد بردارها حداکثر $k - 3^k$ تا می تواند باشد. از طرف دیگر چون هر ایده آل باید یک بردار متمایز تولید کند؛ لذا نتیجه می شود که تعداد ایده آل های حلقه باید متناهی باشد.

قضیه ۳-۲. فرض کنید R یک حلقه کاهشی باشد. در این صورت اگر $\dim_M(G(R)) < \infty$ آن گاه:

$$\text{اگر } \dim_M(G(R)) = 1 \text{ آنگاه } |R| = 2^{\text{Max}} \quad (1)$$

$$\text{اگر } \dim_M(G(R)) = 2 \text{ آنگاه } |R| = 3^{\text{Max}} \quad (2)$$

$$\text{اگر } \dim_M(G(R)) = |\text{Max}(R)| \text{، آنگاه } |\text{Max}(R)| \geq 4 \quad (3)$$

اثبات:

۱- چون $\dim_M(G(R)) < \infty$ ، از قضیه ۲-۲ نتیجه می شود که R تعداد متناهی ایده آل دارد. پس R یک حلقه آرینی است و چون کاهشی و $|R| = 2^{\text{Max}}$ ، نتیجه می شود که R بصورت حاصل ضرب دو میدان می باشد. حال به سادگی دیده می شود که $G(R) = \bar{K}_2$. لذا $\dim_M(G(R)) = 1$.

۲- مشابه با اثبات ۱ و با توجه به اینکه $|R| = 3^{\text{Max}}$ ، نتیجه می شود که $R \cong F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$ که در آن F_1, F_2, F_3 میدان هستند. بنابراین:

$$V(G(R)) = \{0 \oplus F_2 \oplus F_3, F_1 \oplus 0 \oplus F_3, F_1 \oplus F_2 \oplus 0, F_1 \oplus 0 \oplus 0, 0 \oplus F_2 \oplus 0, 0 \oplus 0 \oplus F_3\}.$$

حال قرار می دهیم:

$$S = \{F_1 \oplus 0 \oplus 0, 0 \oplus 0 \oplus F_3\}$$

با محاسبه بردارهای متناظر برای سایر رئوس نشان می دهیم که S یک پایه متریک برای $G(R)$ می باشد. لذا داریم:

$$D(0 \oplus F_2 \oplus F_3|S) = (2, 1)$$

$$D(F_1 \oplus 0 \oplus F_3|S) = (1, 1)$$

$$D(F_1 \oplus F_2 \oplus 0|S) = (1, 2)$$

$$D(0 \oplus F_2 \oplus 0|S) = (2,2).$$

دیده می‌شود که S یک پایه متریک برای $G(R)$ است و لذا $\dim_M(G(R)) = |S| = 2$.
 ۳- چون $\dim_M(G(R)) < \infty$ ، از قضیه ۲-۲ نتیجه می‌شود که R تعداد متناهی ایده‌آل دارد. پس R یک حلقه آرتینی است. لذا $\text{Max}(R)|\text{Max}(R)$ متناهی بوده و R به صورت حاصل ضرب n تا میدان نوشته می‌شود. پس $R \cong F_1 \oplus \dots \oplus F_n$ که در آن $\text{Max}(R) = n$. حال نشان می‌دهیم که $\dim_M(G(R)) = n$. لذا دو ادعای زیر را بیان و اثبات می‌کنیم.

ادعای ۱: $\dim_M(G(R)) \geq n$.

چون $\dim_M(G(R))$ متناهی است، فرض کنید که $W = \{I_1, I_2, \dots, I_k\}$ یک پایه متریک برای گراف $G(R)$ باشد که در آن k یک عدد صحیح و مثبت است. چون $\text{diam}(G(R)) \in \{1, 2\}$ ، نتیجه می‌شود که برای هر $I \in V(G(R)) \setminus W$ فقط 2^k حالت ممکن برای بردار $D(I|W)$ وجود دارد. پس باید داشته باشیم، $|V(G(R)) \setminus W| \leq 2^k$ از طرف دیگر چون $|V(G(R)) \setminus W| = 2^n - k - 2$ ، نتیجه می‌شود که $2^n \leq 2^k + k + 2$. چون $n \geq 4$ ، بوضوح دیده می‌شود که $k = \dim_M(G(R)) \geq n$. بنابراین ادعای ۱ اثبات می‌شود.

ادعای ۲: $\dim_M(G(R)) \leq n$.

فرض کنید I_i ایده‌آلی از R باشد بطوری که مولفه i ام آن برابر F_i و بقیه مولفه‌های آن صفر باشند. قرار می‌دهیم:

$$W = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$$

نشان می‌دهیم که W یک مجموعه تجزیه برای $G(R)$ می‌باشد؛ از این رو فرض کنید که $I, J \in V(G(R)) \setminus W$ دو رأس متمایز از گراف باشند. نشان می‌دهیم که $D(I|W) \neq D(J|W)$. اما این واضح است. چون باتوجه به اینکه $I \neq J$ نتیجه می‌شود که بعضی مولفه‌های I مخالف مولفه‌های J است. لذا بدون کاستن از کلیت می‌توان فرض کرد که مولفه اول I برابر با F_1 و مولفه اول J برابر با صفر باشد. بنابراین مؤلفه اول بردار $D(I|W)$ برابر با ۱ و مولفه اول بردار $D(J|W)$ برابر با ۰ است. این نشان می‌دهد که $D(I|W) \neq D(J|W)$ و لذا W یک مجموعه تجزیه برای $G(R)$ می‌باشد. پس

$$k = \dim_M(G(R)) \leq |W| = n$$

حال از ادعاهای ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که برای $n \geq 4$ ، $\dim_M(G(R)) = |\text{Max}(R)|$.

بعد متریکی گراف اشتراک در حلقه‌های غیر کاهشی

در این بخش، بعد متریکی گراف $G(R)$ را به دست می‌آوریم که در آن، R یک حلقه غیر کاهشی است. برای این کار اول به نکته زیر نیاز داریم:

نکته ۳-۱. فرض کنید G یک گراف هم‌بند باشد. فرض کنید

$$\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$$

یک بخش‌بندی برای رئوس G باشد، به طوری که برای هر $1 \leq i \leq k$ اگر $x, y \in v_i$ آنگاه داشته باشیم $N(x) = N(y)$ در این صورت:

$$\dim_M(G(R)) \geq |V(G)| - k$$

قضیه ۳-۱. فرض کنید $R \cong R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \oplus R_n$ که در آن برای هر $1 \leq i \leq n$ ، (R_i, m_i) یک حلقه موضعی و آرتینی غیر میدان می‌باشد. فرض کنید $n_i \geq 3$ کوچک‌ترین عدد طبیعی باشد؛ به طوری که $m_i^{n_i} = (0)$. اگر برای هر $1 \leq i \leq n$ ، m_i یک ایده‌آل اصلی باشد، آن‌گاه:

$$\dim_M(G(R)) = \prod_{i=1}^n (n_i + 1) - 2^n - 1$$

اثبات: فرض کنید $I = I_1 \oplus I_2 \oplus \dots \oplus I_n$ و $J = J_1 \oplus J_2 \oplus \dots \oplus J_n$ دو رأس از $V(G(R))$ باشند. گوئیم I و J هم ارز هستند و می‌نویسیم $I \sim J$ ، اگر برای هر $1 \leq i \leq n$ ، داشته باشیم $I_i = (0)$ اگر و تنها اگر $J_i = (0)$ به راحتی می‌توان بررسی کرد که \sim یک رابطه هم‌ارزی روی $V(G(R))$ می‌باشد. فرض کنید $[I]$ نشان‌دهنده کلاس هم‌ارزی I باشد. فرض کنید $X, Y \in [I]$ حال چون برای هر ایده‌آلی مانند K ، $K \cap X \neq (0)$ اگر و تنها اگر داشته باشیم $K \cap Y \neq (0)$. نتیجه می‌شود که $N(X) = N(Y)$. چون تعداد کلاس‌های هم‌ارزی برابر با $2^n - 1$ تا است، لذا از نکته ۳-۱ نتیجه می‌شود که $\dim_M(G(R)) \geq |V(G(R))| - 2^n + 1$ از طرف دیگر چون

$$|V(G(R))| = \prod_{i=1}^n (n_i + 1) - 2$$

لذا می‌توان نتیجه گرفت که

$$\dim_M(G(R)) \geq \prod_{i=1}^n (n_i + 1) - 2^n - 1$$

حال نشان می‌دهیم که

$$\dim_M(G(R)) \leq \prod_{i=1}^n (n_i + 1) - 2^n - 1$$

برای این کار مجموعه‌های

$$A = \{I = I_1 \oplus I_2 \oplus \dots \oplus I_n \in V(G(R)) \mid I_i \in \{(0), R_i\}\} \cup \{J(R)\}$$

و $W = V(G(R)) \setminus A$ را در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم که W یک مجموعه تجزیه برای $G(R)$ می‌باشد. فرض کنید:

$$I = I_1 \oplus I_2 \oplus \dots \oplus I_n \text{ و } J = J_1 \oplus J_2 \oplus \dots \oplus J_n \text{ دو رأس متمایز از } A \text{ باشند. نشان می‌دهیم که}$$

$$D(I|W) \neq D(J|W)$$

اگر $I = J(R)$ باشد، آنگاه چون هیچ‌یک از مؤلفه‌های I صفر نمی‌باشد اما بعضی از مؤلفه‌های J برابر با صفر است لذا نتیجه می‌شود که $D(I|W) \neq D(J|W)$.

حال فرض کنید که هیچ کدام از I, J برابر $J(R)$ نباشد. چون مؤلفه‌های این دو رأس فقط از (0) و R_i تشکیل شده است، لذا بدون کاستن از کلیت می‌توان فرض کرد که $I_1 = (0)$ و $J_1 = R_1$. حال باتوجه به اینکه R_1 یک میدان نیست، می‌توان ایده‌آل نابديهی K_1 از R_1 را انتخاب کرد. قرار می‌دهیم $K = (0) \oplus \dots \oplus (0) \oplus K_1$. بهراحتی دیده می‌شود که K با J مجاور اما با I مجاور نمی‌باشد. با توجه به اینکه $K \in W$ ، نتیجه می‌گیریم که:

$$D(I|W) = (2, -, \dots, -) \neq (1, -, \dots, -) = D(J|W)$$

این نشان می‌دهد که W یک مجموعه تجزیه برای $G(R)$ می‌باشد؛ لذا

$$\dim_M(G(R)) \leq |W|$$

از طرف دیگر چون $|W| = |V(G(R)) - A|$ و $|A| = 2^n - 1$ ؛ بنابراین:

$$\dim_M(G(R)) \leq \prod_{i=1}^n (n_i + 1) - (2^n - 1) = \prod_{i=1}^n (n_i + 1) - 2^n + 1$$

قضیه ۲-۳. فرض کنید $F_m \oplus \dots \oplus F_1 \oplus R_n \oplus \dots \oplus R_2 \oplus R_1 \cong R$ که در آن برای هر $1 \leq i \leq n$ ، (R_i, m_i) یک حلقه موضعی آرئینی و برای هر $1 \leq i \leq m$ ، F_i یک میدان می‌باشد. فرض کنید $n_i \geq 3$ کوچک‌ترین عدد طبیعی باشد؛ به‌طوری که $m_i^{n_i} = (0)$. اگر برای هر $1 \leq i \leq n$ ، m_i یک ایده‌آل اصلی باشد، آن‌گاه:

$$\dim_M(G(R)) = 2^m \prod_{i=1}^n (n_i + 1) - 2^{n+m} + m - 1$$

اثبات:

فرض کنید $I = I_1 \oplus I_2 \oplus \dots \oplus I_n \oplus I_{n+1} \oplus \dots \oplus I_{n+m}$ و $J = J_1 \oplus J_2 \oplus \dots \oplus J_n$ و $J_{n+1} \oplus \dots \oplus J_{n+m}$ دو رأس از $V(G(R))$ باشند. گوییم I و J هم‌ارز هستند و می‌نویسیم $I \sim J$ ، اگر برای هر $1 \leq i \leq n$ ، داشته باشیم $I_i = (0)$ اگر و تنها اگر $J_i = (0)$. بهراحتی می‌توان بررسی کرد که \sim یک رابطه هم‌ارزی روی $V(G(R))$ می‌باشد. فرض کنید $[I]$ نشان‌دهنده کلاس هم‌ارزی I باشد. فرض کنید $X, Y \in [I]$. حال چون برای هر ایده‌آلی مانند K ، $K \cap X \neq (0)$ اگر و تنها اگر $K \cap Y \neq (0)$ ، نتیجه می‌شود که $N(X) = N(Y)$. چون تعداد کلاس‌های هم‌ارزی برابر با $2^{n+m} - 1$ تا است؛ لذا از نکته ۳-۱ نتیجه می‌شود که

$$\dim_M(G(R)) \geq |V(G(R))| - (2^{n+m} - 1)J = |V(G(R))| - 2^{n+m} + 1$$

از طرف دیگر چون

$$|V(G(R))| = 2^m \prod_{i=1}^n (n_i + 1) - 2$$

لذا می‌توان نتیجه گرفت که

$$\dim_M(G(R)) \geq 2^m \prod_{i=1}^n (n_i + 1) - 2^{n+m} - 1$$

در واقع اگر فرض کنیم W یک پایه متریک برای $G(R)$ باشد، آن گاه ایده‌آلهایی که حداقل در یکی از مؤلفه‌های آنها ایده‌آل پوچتوان غیر صفر دارد به W تعلق دارد؛ زیرا کلاس‌های هم‌ارزی این عناصر بیشتر از یک عنصر دارند. پس می‌توان فرض کرد که حداکثر عناصری که بیرون از W می‌توانند قرار بگیرند عناصر مجموعه A است.

$$A = \{I = I_1 \oplus I_2 \oplus \dots \oplus I_n \oplus I_{n+1} \oplus \dots \oplus I_{n+m} \in V(G(R)) \mid I_i \in \{(0), R_i, F_i\}\} \cup \{m_1 \oplus m_2 \oplus \dots \oplus m_n \oplus F_{n+1} \oplus \dots \oplus F_{n+m}\}$$

حال مجموعه $B \subset A$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$B = \{I = R_1 \oplus \dots \oplus R_n \oplus I_{n+1} \oplus \dots \oplus I_{n+m} \in V(G(R)) \mid I_i \in \{(0), F_i\}\}$$

فرض کنید که I, J دو عنصر از B باشند. اگر واقعاً $W = V(G(R)) \setminus A$ باشد. آن گاه به راحتی دیده می‌شود که

$$D(I|W) = (1, 1, \dots, 1) = D(J|W)$$

که یک تناقض است. این تناقض نشان می‌دهد که برای پوشش دادن عناصر B یک رده از عناصر باید به W اضافه شود. فرض کنید E_{n+i} ایده‌آلی باشد که مؤلفه $n+i$ ام آن F_i و بقیه مؤلفه‌های آن صفر باشد. به کمک برهان قضیه ۲-۳ و با توجه به اینکه $|B| = 2^m - 1$ ، نتیجه می‌شود که حداقل عناصر برای پوشش دادن عناصر B ، عناصر C می‌باشد.

$$C = \{E_{n+1}, \dots, E_{n+m}\}$$

پس نتیجه می‌شود که

$$\dim_M(G(R)) \geq 2^m \prod_{i=1}^n (n_i + 1) - 2^{n+m} - 1 + |C| = 2^m \prod_{i=1}^n (n_i + 1) - 2^{n+m} - 1 + m$$

حال نشان می‌دهیم که

$$\dim_M(G(R)) \leq 2^m \prod_{i=1}^n (n_i + 1) - 2^{n+m} - 1 + m$$

مجموعه‌های

$$A = \{I = I_1 \oplus I_2 \oplus \dots \oplus I_n \oplus I_{n+1} \oplus \dots \oplus I_{n+m} \in V(G(R)) \mid I_i \in \{(0), R_i, F_i\}\} \cup \{m_1 \oplus m_2 \oplus \dots \oplus m_n \oplus F_{n+1} \oplus \dots \oplus F_{n+m}\}$$

$$C = \{E_{n+1}, \dots, E_{n+m}\}$$

را در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم $W = V(G(R)) \setminus \{A \setminus C\}$. نشان می‌دهیم که W یک مجموعه تجزیه برای $G(R)$ می‌باشد.

فرض کنید $I = I_1 \oplus I_2 \oplus \dots \oplus I_n \oplus I_{n+1} \oplus \dots \oplus I_{n+m}$ و $J = J_1 \oplus J_2 \oplus \dots \oplus J_n \oplus \dots \oplus J_{n+1} \oplus \dots \oplus J_{n+m}$ دو رأس متمایز از $A \setminus C$ باشند. نشان می‌دهیم که

$$D(I|W) \neq D(J|W)$$

اگر $I = F_{n+m} \oplus \dots \oplus F_{n+1} \oplus m_n \oplus \dots \oplus m_2 \oplus m_1$ باشد، آن‌گاه چون هیچ‌یک از مؤلفه‌های I صفر نمی‌باشد اما بعضی از مؤلفه‌های J برابر با صفر است؛ لذا نتیجه می‌شود که

$$D(I|W) \neq D(J|W)$$

حال فرض کنید که هیچ‌کدام از I, J برابر با $F_{n+m} \oplus \dots \oplus F_{n+1} \oplus m_n \oplus \dots \oplus m_2 \oplus m_1$ نباشد. چون مؤلفه‌های این دو رأس فقط از (0) و R_i تشکیل شده است؛ لذا اگر برای بعضی از $1 \leq i \leq n$ ، $I_i = (0)$ و $J_i \neq (0)$ باشد، آن‌گاه بدون کاستن از کلیت می‌توان فرض کرد که $I_1 = (0)$ و $J_1 = R_1$. حال باتوجه به اینکه R_1 یک میدان نیست، می‌توان ایده‌آل نابدهی K_1 از R_1 را انتخاب کرد. قرار می‌دهیم $K = K_1 \oplus (0) \oplus \dots \oplus (0)$. به راحتی دیده می‌شود که K با J مجاور اما با I مجاور نمی‌باشد. با توجه به اینکه $K \in W$ نتیجه می‌گیریم که

$$D(I|W) = (2, -, \dots, -) \neq (1, -, \dots, -) = D(J|W)$$

اگر برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $I_i = (0)$ و تنها اگر $J_i = (0)$ ، آن‌گاه به راحتی می‌توان $K \in C$ را طوری پیدا کرد که با J مجاور اما با I مجاور نمی‌باشد. با توجه به اینکه $K \in W$ ، نتیجه می‌گیریم که

$$D(I|W) \neq D(J|W)$$

این نشان می‌دهد که W یک مجموعه تجزیه برای $G(R)$ می‌باشد. لذا

$$\dim_M(G(R)) \leq |W|$$

از طرف دیگر چون $|A| = 2^{n+m} - 1$ و $|W| = |V(G(R))| - |A| - |C|$ ، لذا داریم

$$\dim_M(G(R)) \leq 2^m \prod_{i=1}^n (n_i + 1) - 2 - (2^{n+m} - 1) + m$$

و لذا

$$\dim_M(G(R)) \leq 2^m \prod_{i=1}^n (n_i + 1) - 2^{n+m} - 1 + m$$

پس نتیجه می‌شود که

$$\dim_M(G(R)) = 2^m \prod_{i=1}^n (n_i + 1) - 2^{n+m} + m - 1$$

نتیجه‌گیری

در این مقاله، بعد متریکی گراف اشتراک بررسی و مطالعه شده است. نشان داده شده است که بعد متریکی این گراف، متناهی است اگر و تنها اگر حلقه R تعداد متناهی ایده‌آل داشته باشد. چون هر حلقه‌ای که تعداد متناهی ایده‌آل دارد، یک حلقه آرئینی است؛ لذا بعد متریکی این حلقه در صورت متناهی بودن فقط در حلقه‌های آرئینی بحث شده است؛ از این رو در چندین رده از حلقه‌های آرئینی بعد متریکی گراف $G(R)$ به دست آمده است.

تقدیر و تشکر

از داوران محترم که با ارائه پیشنهادهای ارزشمند خود موجب ارتقای سطح کیفی مقاله شدند بسیار سپاسگزاریم.

References

- [1] Nikandish, R., Nikmehr, M. J., & Bakhtiyari, M. (2015). Coloring of The Annihilator Graph of a Commutative ring. *Journal of Algebra and Its Applications*, 15(7), 1650124. <https://doi.org/10.1142/S0219498816501243>
- [2] Nikmehr, M., Nikandish, R., & Bakhtiyari, M. (2017). More on the annihilator graph of a commutative ring. *Hokkaido Mathematical Journal*, 46(1), 107-118. <https://doi.org/10.1142/S0219498819501603>
- [3] Pirzada, S., & Raja, R. (2017). On the metric dimension of a zero-divisor graph. *Communications in Algebra*, 45(4), 1399-1408. <https://doi.org/10.1080/00927872.2016.1175602>
- [4] Pirzada, S., Raja, R., & Redmond, S. (2014). Locating sets and numbers of graphs associated to commutative rings. *Journal of Algebra and Its Applications*, 13(07), 1450047. <https://doi.org/10.1142/S0219498814500479>
- [5] Harary, F., & Melter, R. A. (1976). On the Metric Dimension of a Graph. *Ars Combinatoria*, 2, 191-195. [https://www.scirp.org/\(S\(351jmbntvnsjt1aadkposzje\)\)/reference/ReferencesPapers.aspx?ReferenceID=388665](https://www.scirp.org/(S(351jmbntvnsjt1aadkposzje))/reference/ReferencesPapers.aspx?ReferenceID=388665)
- [6] Sharp, R. Y. (2000). *Steps in Commutative Algebra* (2nd ed.). London Mathematical Society student texts, Cambridge University Press. https://esploro.lib.uga.edu/discovery/fulldisplay?vid=01GALI_UGA:UGA&docid=alma9926528343902959&context=L
- [7] West, D. B. (2001). *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall. <https://books.google.com/books?id=TuvuAAAAMAAJ>
- [8] Chakrabarty, I., Ghosh, S., Mukherjee, T. K., & Sen, M. K. (2009). Intersection graphs of ideals of rings. *Discrete Mathematics*, 309(17), 5381-5392. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2008.11.034>