Karafan

Quarterly Scientific Journal of Technical and Vocational University

Autumn 2022, Vol. 19, No. 3, p. 635-646

Journal homepage: https://karafan.tvu.ac.ir/?lang=en

TVU

:10.48301/KSSA.2021.289056.1558

Original Research

E-ISSN: 2538-4430
ISSN: 2382-9796

Finite Groups with Non-Commuting Graphs

Kayvan Moradipour[1*], Sanaz Asadi Rahmati[2]

[1]Assistant Professor, Department of Mathematics, Technical and Vocational University (TVU), Tehran, Iran.
[2]Ph.D, Department of Mathematics, Technical and Vocational University (TVU), Tehran, Iran.

ARTICLE INFO

Received: 06.24.2021
Revised: 09.23.2021
Accepted: 10.03.2021

Keyword:
Non-commuting graphs
Conjugacy vector type
Graph isomorphism
Power prime order
Metacyclic

***Corresponding Author:**
Kayvan Moradipour
Email: *kayvanmrp@yahoo.com*

ABSTRACT

Group G is called metacyclic if it contains a normal cyclic subgroup Nsuch that the quotient group G/N is also cyclic. In this paper, two conjectures proposed by Abdollahi et al. (2006) for a family of finite non-abelian metacyclic prime power groups G were investigated. For this purpose, first, the metacyclic p −groups were categorized into three Types (families) of the non-isomorphic groups. Next, by using the size of centralizers and also equality of the conjugacy vector type ctv (G) of these groups, the necessary and sufficient conditions under which two non-abelian finite metacyclic prime power groups have the isomorphic non-commuting graphs were determined. The first conjecture of Abdollahi et al. for the three families of the classified groups was proven to be true. Likewise, the second conjecture held for some restrictions on the parameters of group$G$. Finally, it was demonstrated that there were non-isomorphic p −groups with the same non-commuting graphs.

EXTENDED ABSTRACT

Introduction

In the recent years, investigating algebraic properties of graphs corresponding to groups and rings has become an attractive research. Suppose G is a nonabelian group, the non-commuting graph Γ_G of the group G is defined as the graph, whose vertex set is $G \setminus Z(G)$ and two distinct vertices x, y are connected by an edge if and only if $xy \neq yx$. The idea of non-commutative graphs is derived from the old question of Erdos on the size of graph clicks, which was answered positively by Neumann . Recently, this topic has been studied by many researchers. Abdolahi et al. have given the general properties of these graphs and proposed the following two conjectures.

Conjecture 1: If H and K are two finite non-abelian groups and $\Gamma_G \simeq \Gamma_K$, then $|H| = |K|$.

Conjecture 2: If H and K are two finite non-abelian groups and K is simple such that $\Gamma_G \simeq \Gamma_K$, then $H \simeq K$.

Although the answer to the above conjectures is generally negative, they are true for some classes of groups. In this regard, Abdollahi et al. have given a positive answer to Conjecture 1 for various classes of groups. On the other hand, Abdollahi and Shahvardi also showed that when H and K are two nilpotent groups with non-commutative irregular graphs, then conjecture 1 is true. Moreover, Darfesheh proved that if H or K is a non-abelian finite simple group, then conjecture 1 holds. Likewise, if H or K is a finite non-abelian group such that satisfies the Thomson's conjecture, then conjecture 2 is true. Abdollahi and Shahvardi also showed that if H or K is an alternating group, then Conjecture 2 is true. On the other hand, Derfeshe and Yousefzadeh proved that if one of the groups H or K is symmetric, then conjecture 2 is true. In addition, Zhang and Shai showed that Conjecture 2 is true when it is isomorphic to the simple group $L_4(9)$. Recently, Solomon and Walder proved that if H or K is a finite simple non-abelian group, then both conjectures are true.

A group is called metacyclic if it contains a normal cyclic subgroup such that the quotient group is also cyclic. In this paper, two conjectures proposed by Abdollahi et al. for a family of finite non-abelian metacyclic prime power groups were investigated. The metacyclic groups were categorized into three types of the non-isomorphic groups. Next, by using the size of centralizers and also equality of the conjugacy vector type ctv(G) of these groups, necessary and sufficient conditions under which two non-abelian finite metacyclic prime power groups have the isomorphic non-commuting graphs were determined. The present research proved that the first conjecture of Abdollahi et al. for the three families of the classified groups is true. Likewise, the second conjecture held for some restrictions on the parameters of the groups. Finally, it was shown that there are non-isomorphic groups with the same no commuting graphs. In this paper, two conjectures proposed by Abdollahi et al. for a family of finite non-abelian metacyclic prime power groups were investigated.

Methodology

A group is called metacyclic if it contains a normal cyclic subgroup such that the quotient group is also cyclic. The metacyclic groups were categorized into three types of the non-isomorphic groups. Next, by using the size of centralizers and also equality of the conjugacy vector type ctv(G) of these groups, the necessary and sufficient conditions under which two non-abelian finite metacyclic prime power groups have the isomorphic non-commuting graphs were determined. It was also proven that the first conjecture of Abdollahi et al. for the three families of the classified groups is true. Likewise, the second conjecture held for some restrictions on the parameters of the groups. Finally, it was demonstrated that there are non-isomorphic groups with the same non commuting graphs.

First, a class of finite p-groups which is called metacyclic groups was introduced as follows:

$$G = \langle a, b | a^{p^m} = 1, b^{p^n} = a^k, bab^{-1} = a^r \rangle, \tag{A}$$

where, $p^m | r^{p^n} - 1$, $p^m | k(r-1), 0 < r, \mathrm{k} \leq p^m$ and $m, n \geq 0$.

Beuerle's classifications were divided into three different classes of finite p-group as Types 1,2 and 3 as below.

Type 1. If $\beta \geq \gamma \geq 1$ and p is an odd prime or $\alpha - \gamma \geq 2$, we have

$$G = G(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon) \cong \langle a, b : a^{p^\alpha} = 1, b^{p^\beta} = a^{p^{\alpha-\varepsilon}}, a^b = a^{p^{\alpha-\gamma-1}} \rangle, \tag{1}$$

for some $\alpha, \beta, \varepsilon, \gamma$.

Type 2. For $\alpha \geq 2$

$$G = G(\alpha, \beta, 0, \varepsilon) \cong \langle a, b : a^{2^\alpha} = 1, b^{2^\beta} = a^{2^{\alpha-\varepsilon}}, a^b = a^{-1} \rangle. \tag{2}$$

Type 3. For $\gamma > 0$ and $\alpha - \gamma \geq 2$

$$G = G(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon) \cong \langle a, b : a^{2^\alpha} = 1, b^{2^\beta} = a^{2^{\alpha-\varepsilon}}, a^b = a^{2^{\alpha-\gamma-1}} \rangle. \tag{3}$$

These groups were studied by their centralizers. The notation $[b, a] = bab^{-1}a^{-1} = a^b a^{-1} = a^{\lambda-1}$ is the commutator of elements a and b. The element a is conjugate to b in G , if there exists an element $g \in G$ such $g^{-1}ag = a^g = b$.

The type of a metacyclic p-group G is denoted by $\mathrm{Type}(G)$ and the notation $D(\Gamma_G)$ is used to show the set of all degrees of vertices of the graph and CTV(G) represents the set of all conjugacy class sizes of G.

Results and discussion

Necessary and sufficient conditions were given for two prime power metacyclic groups to have isomorphic non- commuting graphs. It was proven that if H and K are two groups with the same orders and $\Gamma_H \cong \Gamma_K$, then $\mathrm{ctv}(H) = \mathrm{ctv}(K)$. It was supposed that

$H = H(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ is a non-abelian metacyclic p-group and $K = K(\alpha', \beta', \gamma', \varepsilon')$ is a non-abelian metacyclic q-group. Thus, if $|Z(H)| = |Z(K)|$and $|H| = |K|$, then $\Gamma_H \cong \Gamma_K$. The main result showed the investigation of the necessary and sufficient conditions under which two non-abelian metacyclic p-groups have isomorphic non-commuting graphs. This result is stated below:

For to non-commuting graphs Γ_H and Γ_K we have $\Gamma_H \cong \Gamma_K$if and only if one of the following holds:

(1) if $\text{Type}(H) = \text{Type}(K) = 1$, then $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$ and $\gamma = \gamma'$.
(2) if $\text{Type}(H) = \text{Type}(K) = 2$, then $\alpha = \alpha'$ and$\beta = \beta'$.
(3) if $\text{Type}(H) = \text{Type}(K) = 3$, then $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ and $\gamma = \gamma'$.
(4) if $\text{Type}(H) = 1$ and $\text{Type}(K) = 2$, then $\gamma = 1$, $\alpha' = 2$ and $\beta' = \alpha + \beta - 2$.
(5) if $\text{Type}(H) = 2$ and $\text{Type}(K) = 3$, then $\alpha = \alpha' \geq 3$, $\beta = \beta'$ and $\gamma' = 1$.

Conclusion

It was proved that if the non -commuting graph Γ_H of the on-abelian metacyclic p-group H and the non-commuting graph Γ_K of the on-abelian metacyclic q-group K are isomorphic, then H and K have the same orders and centers. It was also proved that the conjecture 1 proposed by Abdollahi et al. holds for two prime power metacyclic groups. It stated the necessary and sufficient conditions under which two non-abelian metacyclic p-groups have isomorphic non-commuting graphs. In addition, it was shown that there are non-isomorphic metacyclic p-group groups with isomorphic non- commuting graphs.

کارافن
فصلنامه علمی دانشگاه فنی و حرفه‌ای
پاییز ۱٤۰۱، دوره ۱۹، شماره ۳، ٦٤٦-٦۳٥
آدرس نشریه: https://karafan.tvu.ac.ir/
doi:10.48301/KSSA.2021.289056.1558

شاپای الکترونیکی: ۴۴۳۰-۲۵۳۸
شاپای چاپی: ۹۷۹۶-۲۳۸۲

مقاله پژوهشی

گروه‌های متناهی با گراف‌های ناجابه‌جایی یکریخت

کیوان مرادی پور[۱*]، ساناز اسدی رحمتی[۲]

۱- استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه فنی و حرفه‌ای، تهران، ایران.
۲- دکتری، گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه فنی و حرفه‌ای، تهران، ایران.

اطلاعات مقاله

دریافت مقاله: ۱۴۰۰/۰۴/۰۳
بازنگری مقاله: ۱۴۰۰/۰۷/۰۱
پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۷/۱۱

کلید واژگان:
گراف ناجابه‌جایی
بردار نوع مزدوج
گراف‌های یکریخت
توان مرتبه اول
متادوری

***نویسنده مسئول:** کیوان مرادی پور
پست الکترونیکی:
kayvanmrp@yahoo.com

چکیده

گروه G متادوری است هرگاه شامل یک زیرگروه دوری و نرمال N باشد به‌طوری‌که گروه خارج قسمتی G/N نیز دوری باشد. در این مقاله، دو حدس مطرح‌شده توسط عبدالهی و همکاران(۲۰۰۶) را برای خانواده‌ای از گروه‌های متناهی و نا آبلی متادوری G با مرتبهٔ توان اول موردبررسی قرار می‌دهیم . برای این منظور، ابتدا این گروه‌ها را به سه نوع (خانواده) از گروه‌های نایکریخت دسته‌بندی می‌کنیم، سپس با استفاده از اندازه مرکز سازهای این گروه‌ها و همین‌طور خاصیت تساوی بردارهای نوع مزدوج آنها، شرایط لازم و کافی را به دست می‌آوریم که تحت آن شرایط، گروه‌های دسته بندی شده دارای گراف‌های ناجابه‌جایی یکریخت باشند. در انتها، ثابت می‌کنیم حدس اول عبدالهی و همکاران برای دو گروه متادوری از توان مرتبهٔ اول برقرار است. همین‌طور حدس دوم نیز با اعمال محدودیت‌هایی روی پارامترهای گروه های رده بندی شده درست است. در پایان نتیجه می‌گیریم p- گروه‌های غیر همسان با گراف‌های ناجابه‌جایی یکریخت وجود دارند.

مقدمه

در سال‌های اخیر، بررسی خواص جبری گراف‌های متناظر با گروه‌ها و حلقه‌ها به تحقیقات جذاب این حوزه تبدیل شده است [۱]، [۲] ، [۳]، [۴]، [۵]، [۶] ، [۷] و [۸]. فرض می‌کنیم G یک گروه نا آبلی باشد، گراف ناجابه‌جایی G که با Γ_G نمایش داده می‌شود گرافی است با مجموعه رئوس $G \setminus Z(G)$ و دو رأس x و y آن مجاورند اگر $xy \neq yx$. ایده گراف‌های ناجابه‌جایی از سؤال قدیمی اردوش روی اندازه خوشه‌های گراف مطرح‌شده است که آن سؤال توسط [۹] پاسخ مثبت داده شد. این موضوع اخیراً توسط خیلی از محققین موردمطالعه قرارگرفته شده است. [۷] خواص عمومی این گراف‌ها را مطالعه و حدس‌های زیر را مطرح کرده‌اند.

- **حدس ۱**: اگر H و K دو گروه نا آبلی متناهی باشند که $\Gamma_H \cong \Gamma_K$، آنگاه $|H|=|K|$.
- **حدس ۲**: اگر H و K دو گروه نا آبلی متناهی و K ساده باشد به‌طوری‌که $\Gamma_H \cong \Gamma_K$، آنگاه $H \cong K$.

گرچه جواب حدس‌های فوق در حالت کلی منفی است، اما برای رده‌های مختلفی از گروه‌ها صدق می‌کنند. [۷] جواب مثبتی به حدس ۱ برای رده‌های متنوعی از گروه‌ها داده‌اند. هم‌چنین، [۱۰] نشان می‌دهند که هرگاه H و K دو گروه پوچ‌توان با گراف‌های ناجابه‌جایی نامنظم باشند، آنگاه حدس ۱ درست است ([۱۱]. [۸] نشان می‌دهد که اگر H یا K گروهی ناآبلی، متناهی و ساده باشد، در این صورت حدس ۱ برقرار است. همین‌طور هرگاه H یا K گروه نا آبلی متناهی باشد که در حدس تامسون [۱۲] صدق کنند، آنگاه حدس ۲ درست است. [۱۰] هم‌چنین نشان دادند اگر H یا K یک گروه متناوب باشد، آنگاه حدس ۲ درست است. از طرفی، [۱۳] اثبات کردند که اگر یکی از گروه‌های H یا K متقارن باشد، آنگاه حدس ۲ درست است. از طرفی، [۱۴] نشان دادند که حدس ۲ هم‌چنین درست است وقتی‌که H یا K با گروه ساده $L_۴(۹)$ یا چند گروه دیگر یکریخت باشد. اخیراً [۱۵] ثابت کرده‌اند اگر H یا K گروه نا آبلی ساده متناهی باشند، آنگاه هر دو حدس درست هستند. برای دیدن نتایج بیشتر به مطالعات [۷]، [۱۶] و [۱۷] مراجعه کنید.

در این مقاله، حدس‌های مطرح‌شده را برای خانواده گروه‌های متناهی متادوری از مرتبه توان اول بررسی می‌کنیم. همین‌طور شرایط لازم و کافی برای یکریخت بودن گراف‌های ناجابه‌جایی وابسته به این گروه‌ها را به دست می‌آوریم. تا انتهای بحث، از دسته‌بندی $p-$گروه‌های متادوری که توسط [۱۸] صورت گرفته است استفاده می‌کنیم.

مفاهیم و نتایج مقدماتی

تعریف ۱.۲: گروه G را *متادوری* می‌نامند هرگاه شامل یک زیرگروه نرمال دوری مانند N باشد به‌طوری‌که گروه خارج قسمتی G/N نیز دوری باشد.

تعریف ۲.۲: فرض کنید $a,b \in G$ باشد. عضو a *مزدوج* b است هرگاه عنصری مانند g ازگروه G وجود داشته باشد به‌طوری‌که $g^{-1}ag = a^g = b$.

یک $p-$گروه متادوری G معمولاً به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود [۱۹]:

$$G = \langle a,b \mid a^{p^m} = 1,\ b^{p^n} = a^k, bab^{-1} = a^r \rangle$$

که در آن: $m,\ n \geq 0$ ، $0 < r,\ k \leq p^m$ ، $p^m \mid k(r-1)$ و $p^m \mid r^{p^n} - 1$.

برل (۲۰۰۵) رده‌بندی از همه $p-$گروه‌های متناهی متادوری انجام داده است که در اینجا آنها را به سه دسته زیر تقسیم می‌کنیم. به‌راحتی می‌توان نشان داد این سه حالت همه گروه‌های رده‌بندی شده برل را پوشش می‌دهند. در واقع،

اگر G یک $p-$گروه متادوری باشد، آنگاه دسته‌بندی برل می‌تواند دریکی از سه نوع (Type) زیر قرار گیرد به شرطی که در $\alpha,\ \beta \in \mathbf{N}$ و $\varepsilon,\ \gamma \geq 0$ اعداد صحیح در نظر گرفته شوند.

نوع ۱: برای بعضی از $\alpha,\ \beta,\ \varepsilon,\ \gamma$ به شرطی که $\beta \geq \gamma \geq 1$ و p یک عدد اول فرد یا $\alpha-\gamma \geq 2$ باشد، داریم:

$$G = G(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon) \cong \langle a,b : a^{p^{\alpha}} = ۱,\ b^{p^{\beta}} = a^{p^{\alpha-\varepsilon}},\ a^{b} = a^{p^{\alpha-\gamma-۱}} \rangle \qquad (۱)$$

نوع ۲: وقتی $\alpha \geq 2$، داریم:

$$G = G(\alpha,\beta,۰,\varepsilon) \cong \langle a,b : a^{۲^{\alpha}} = ۱,\ b^{۲^{\beta}} = a^{۲^{\alpha-\varepsilon}},\ a^{b} = a^{-۱} \rangle \qquad (۲)$$

نوع ۳: وقتی $\gamma > 0$ و $\alpha-\gamma \geq 2$، داریم:

$$G = G(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon) \cong \langle a,b : a^{۲^{\alpha}} = ۱,\ b^{۲^{\beta}} = a^{۲^{\alpha-\varepsilon}},\ a^{b} = a^{۲^{\alpha-\gamma}-۱} \rangle. \qquad (۳)$$

این گروه‌ها از طریق مرکز سازهای آنها مورد بررسی و مطالعه قرارگرفته‌اند که در سه گزاره زیر خلاصه می‌شوند [۲۰].

تعریف ۳.۲: زیرگروه $C_G(g) = \{x \in G : xg = gx\}$، که در آن $g \in G$ است را *مرکز ساز* g در G می‌نامند.

گزاره ۱.۲: فرض کنید $G = G(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon)$ یک گروه از نوع ۱ باشد. در این صورت، $|G| = p^{\alpha+\beta}$ و $|Z(G)| = p^{\alpha+\beta-۲\gamma}$. هم‌چنین اگر $g = a^i b^j \in G$ آنگاه:

$$|C_G(g)| = p^{\alpha+\beta-2\gamma+min\{e_p(i)+e_p(j)\}}$$

که در آن $e_p(i)$ نمایش بزرگ‌ترین نمای p در i است.

گزاره ۲.۲: فرض کنید $G = G(\alpha,\beta,۰,\varepsilon)$ یک گروه از نوع ۲ باشد، در این صورت، $|G| = ۲^{\alpha+\beta}$ و $|Z(G)| = ۲^{\beta}$. همین‌طور اگر $g = a^i b^j \in G$ آنگاه:

$$|C_G(g)| = \begin{cases} 2^{\alpha+\beta}, & a^i b^j \in Z(G) \\ 2^{\alpha+\beta-1}, & a^i b^j \notin Z(G), j = 2k \\ 2^{\beta+1}, & a^i b^j \notin Z(G), j = 2k+1 \end{cases}$$

که در آن $k \in \mathbf{Z}$.

گزاره ۳.۲: اگر $G = G(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon)$ یک گروه از نوع ۳ باشد، آنگاه $|G| = ۲^{\alpha+\beta}$ و $|Z(G)| = ۲^{\beta-\gamma+۱}$. همین‌طور برای هر عضو $g = a^i b^j \in G$ داریم:

$$|C_G(g)| = \begin{cases} 2^{\alpha+\beta-\gamma+e_2(i)}, & j = 2k, e_2(j) \geq \gamma, e_2(i) < \gamma \\ 2^{\alpha+\beta-\gamma+e_2(j)}, & j = 2k, e_2(i) \geq \alpha - 1 \text{ or} \\ & e_2(i) - e_2(j) \geq \alpha - \gamma - 1, e_2(i) \geq \gamma \\ 2^{\alpha+\beta-\gamma+e_2(j)-1}, & j = 2k, e_2(i) \geq \gamma, e_2(i) < \alpha - 1, \\ & e_2(i) - e_2(j) < \alpha - \gamma - 1 \\ 2^{\alpha+\beta-\gamma+e_2(j)}, & j = 2k, e_2(i) \leq e_2(j), \\ & e_2(i) - e_2(j) \geq \alpha - \gamma - 1 \\ 2^{\alpha+\beta-\gamma+e_2(j)-1}, & j = 2k, e_2(i) \leq e_2(j) < \gamma, \\ & e_2(i) - e_2(j) < \alpha - \gamma - 1, \\ 2^{\alpha+\beta-\gamma+e_2(j)}, & j = 2k, e_2(i) < e_2(j) < \gamma \\ 2^{\beta+1}, & j = 2k+1, \end{cases}$$

که در آن $k \in \mathbf{Z}$.

در آنچه پیش رو خواهیم داشت منظور از گروه، $p-$گروه متناهی نا آبلی متادوری است. همین‌طور *نوع* هر $p-$ گروه متادوری را با نماد $\mathrm{Type}(G)$ نمایش داده و از نماد $D(\Gamma_G)$ برای نمایش *مجموعه همه درجه‌های رأس‌های* یک گراف Γ_G استفاده می‌شود.

تعریف ۴.۲: گراف ناجابه‌جایی یک گروه G که با نماد Γ_G نشان داده می‌شود، گرافی است با مجموعه رئوس $G \setminus Z(G)$ و دو رأس مجزای x و y از Γ_G مجاورند هرگاه $xy \neq yx$.

مثال ۱.۲: در ۲-گروه $G = D_{2^{\alpha+1}} = \langle a, b : a^{2^\alpha} = 1,\ b^2 = 1,\ a^b = a^{-1} \rangle$؛ تعداد اعضای گروه برابر است با $|G| = 2^{\alpha+1}$. هم‌چنین مرکز آن عبارت است از $Z(G) = \langle a^{2^{\alpha-1}}, b^2 \rangle$ که در آن $|Z(G)| = 2$. تعداد رأس‌های گراف ناجابجایی Γ_G برابر است با $|V(\Gamma_G)| = 2^{\alpha+1} - 2$. همین‌طور، این گراف دارای $|E(\Gamma_G)| = 2^\alpha(2^{\alpha+1} - 2^{\alpha-1} - 3)$ یال می‌باشد. در حالت خاص $\alpha = 2$، گراف ناجابجایی ۲-گروه متادوری D_8 که در آن $Z(D_8) = \{e, a^2\}$، دارای ۶ رأس و ۱۲ یال است.

نتایج اصلی

در این بخش، شرایط لازم و کافی را برای آن‌که دو گروه متادوری توان اول دارای گراف‌های ناجابه‌جایی یکریختی باشند بیان می‌کنیم.

اگر G یک گروه باشد، آنگاه مجموعه همه اندازه‌های رده مزدوج G را با $\mathrm{ctv}(G)$ نمایش داده و *بردار نوع مزدوج* نامیده می‌شود. در اینجا ابتدا لم زیر را که برای اثبات قضیه ۲.۳ مورداستفاده قرار می‌گیرد اثبات می‌کنیم.

لم ۱.۳: اگر H و K دو گروه هم‌مرتبه باشند و $\Gamma_H \cong \Gamma_K$، آنگاه $\mathrm{ctv}(H) = \mathrm{ctv}(K)$.

اثبات. فرض می‌کنیم $\theta : V(\Gamma_H) \to V(\Gamma_K)$ یک تناظر یک‌به‌یک از رأس‌های دو گراف Γ_H و Γ_K و برای هر $h \in V(\Gamma_H)$ در نظر می‌گیریم h^H رده هم ارزی h در H باشد. فرض می‌کنیم $\theta(h) = k$ باشد به‌طوری‌که $\deg_{\Gamma_H}(h) = \deg_{\Gamma_K}(k)$، در این صورت $|C_H(h)| = |C_K(k)|$. چون $|H| = |K|$، داریم:

$$\left|h^H\right| = \left|H : C_H(h)\right| = \left|H\right| / \left|C_H(h)\right|$$
$$= \left|K\right| / \left|C_K(k)\right| = \left|K : C_K(k)\right| = \left|k^K\right|,$$

یعنی اندازه‌های رده مزدوج دو گروه H و K برابر هستند.

قضیه زیر نشان می‌دهد که حدس ۱ برای خانواده‌ای از گروه‌های توان اول متادوری نا آبلی برقرار است.

در تمامی این بخش فرض می‌کنیم $H = H(\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon)$ یک $p-$گروه متادوری و $K = K(\alpha',\beta',\gamma',\varepsilon')$ یک $q-$گروه غیرآبلی متادوری باشد.

قضیه ۱.۳: اگر $\Gamma_H \cong \Gamma_K$، آنگاه $|H| = |K|$ و $|Z(H)| = |Z(K)|$.

اثبات. فرض کنید $\theta : \Gamma_H \to \Gamma_K$ یک یکریختی از Γ_H به Γ_K باشد. بدون این‌که از کلیت موضوع کم شود فرض می‌کنیم که *نوع* H کمتر یا مساوی با *نوع* K باشد. حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

(۱) فرض کنیم $\mathrm{Type}(H) = \mathrm{Type}(K) = ۱$ همین‌طور $h_۱,\ h_۲ \in H \setminus Z(H)$ به‌طوری‌که:

$$deg_{\Gamma_H}(h_1) = min\, D\,(\Gamma_H)$$

و $\deg_{\Gamma_H}(h_۲) = \min D(\Gamma_H) \setminus \{\deg_{\Gamma_H}(h_۱)\}$. اگر برای مقادیر $i = ۱,۲$ داشته باشیم $k_i = \theta(h_i)$، آنگاه:

$$deg_{\Gamma_K}(k_1) = min\, D\,(\Gamma_K)$$

و $\deg_{\Gamma_K}(k_۲) = \min D(\Gamma_K) \setminus \{\deg_{\Gamma_K}(k_۱)\}$. چون $\deg_{\Gamma_H}(h_i) = \deg_{\Gamma_K}(k_i)$، از اینجا و با استفاده از گزاره ۱.۲ نتیجه می‌شود:

$$p^{\alpha+\beta} - p^{\alpha+\beta-۱} = q^{\alpha'+\beta'} - q^{\alpha'+\beta'-۱}$$
$$p^{\alpha+\beta} - p^{\alpha+\beta-۲} = q^{\alpha'+\beta'} - q^{\alpha'+\beta'-۲}$$

با تقسیم دو طرف معادلهٔ اول بر طرفین معادلهٔ دوم، به‌تساوی $p/(p+۱) = q/(q+۱)$ می‌رسیم. از اینجا به دست می‌آوریم $p = q$؛ بنابراین $\alpha+\beta = \alpha'+\beta'$ و درنتیجه $|H| = |K|$.

(۲) فرض کنیم $\mathrm{Type}(H)$ و $\mathrm{Type}(K)$ برابر ۲ یا ۳ باشد. در نظر بگیرید $h \in H \setminus Z(H)$ به‌طوری‌که $\deg_{\Gamma_H}(h) = \min D(\Gamma_H)$. اگر $k = \theta(h)$، آنگاه

$$\deg_{\Gamma_K}(k) = \min D(\Gamma_K).$$

چون $\deg_{\Gamma_H}(h) = \deg_{\Gamma_K}(k)$، با استفاده از گزاره‌های ۲.۲ و ۲.۳ داریم:

$$۲^{\alpha+\beta} - ۲^{\alpha+\beta-۱} = ۲^{\alpha'+\beta'} - ۲^{\alpha'+\beta'-۱},$$

که ازاینجا نتیجه می‌گیریم $\alpha+\beta = \alpha'+\beta'$؛ بنابراین $|H| = |K|$.

(۳) فرض کنید $\mathrm{Type}(H) = ۱$ و $\mathrm{Type}(K) = ۲$. فرض کنید $h_۱,\ h_۲,\ k_۱,\ k_۲$ اعضایی به‌صورت حالت (۱) باشند. چون $\deg_{\Gamma_H}(h_i) = \deg_{\Gamma_K}(k_i)$. گزاره‌های ۲.۱ و ۲.۲ نشان می‌دهند که:

$$p^{\alpha+\beta} - p^{\alpha+\beta-۱} = ۲^{\alpha'+\beta'} - ۲^{\alpha'+\beta'-۱}$$
$$p^{\alpha+\beta} - p^{\alpha+\beta-۲} = ۲^{\alpha'+\beta'} - ۲^{\beta'+۱}.$$

بنابراین $p/(p+۱) = ۲^{\alpha'-۲}/(۲^{\alpha'-۱}-۱)$ که ازاینجا مقادیر $p=۲$ و $\alpha'=۳$ به دست می‌آیند. درنتیجه خواهیم داشت: $\alpha+\beta=\alpha'+\beta'$؛ بنابراین $|H|=|K|$.

(۴) فرض کنید $\mathrm{Type}(H)=۱$ و $\mathrm{Type}(K)=۳$؛ مانند حالت (۱) داریم $|H|=|K|$. □

اکنون در شرایطی قرار داریم که حدس ۲ را موردبررسی قرار دهیم. قضیهٔ زیر شرایط لازم و کافی را ارائه می‌دهد که تحت این شرایط دو گروه متادوری نا آبلی با توان اول دارای گراف‌های ناجابه‌جایی یکریخت باشند.

قضیه ۲.۳: $\Gamma_H \cong \Gamma_K$ اگر و فقط اگر یکی از حالات زیر برقرار باشد.

- اگر $\mathrm{Type}(H)=\mathrm{Type}(K)=۱$ آنگاه $\alpha+\beta=\alpha'+\beta'$ و $\gamma=\gamma'$.
- اگر $\mathrm{Type}(H)=\mathrm{Type}(K)=۲$ آنگاه $\alpha=\alpha'$ و $\beta=\beta'$.
- اگر $\mathrm{Type}(H)=\mathrm{Type}(K)=۳$ آنگاه $\alpha=\alpha'$، $\beta=\beta'$ و $\gamma=\gamma'$.
- اگر $\mathrm{Type}(H)=۱$، $\mathrm{Type}(K)=۲$ آنگاه $\gamma=۱$، $\alpha'=۲$ و $\beta'=\alpha+\beta-۲$.
- اگر $\mathrm{Type}(H)=۲$، $\mathrm{Type}(K)=۳$ آنگاه $\alpha=\alpha'\geq ۳$، $\beta=\beta'$ و $\gamma'=۱$.

اثبات. با استفاده از قضیه ۱.۳ داریم: $|H|=|K|$ و $|Z(H)|=|Z(K)|$. حال فرض می‌کنیم: $\xi: Z(H)\to Z(K)$ یک نگاشت دوسویی باشد. حالات زیر را داریم:

(۱) فرض کنید $\mathrm{Type}(H)=\mathrm{Type}(K)=۱$. چون $|H|=|K|$ و $|Z(H)|=|Z(K)|$ داریم $\alpha+\beta=\alpha'+\beta'$ و $\gamma=\gamma'$. برعکس، اگر $\alpha+\beta=\alpha'+\beta'$ و $\gamma=\gamma'$ در این صورت با استفاده از گزاره ۲.۱ نگاشت $\theta: H\setminus Z(H)\to K\setminus Z(K)$ تعریف‌شده به‌صورت $\theta(a^i b^j z)=a'^i b'^j \xi(z)$ برای همه $۰\leq i,j\leq p^{\gamma}$ یک یکریختی بین Γ_H و Γ_K است.

(۲) فرض کنید که $\mathrm{Type}(H)=\mathrm{Type}(K)=۲$ باشد. از $|H|=|K|$ و $|Z(H)|=|Z(K)|$ نتیجه می‌شود که: $\alpha+\beta=\alpha'+\beta'$ و $\beta=\beta'$؛ بنابراین، $\alpha=\alpha'$. اثبات عکس این حالت واضح است.

(۳) اگر $\mathrm{Type}(H)=\mathrm{Type}(K)=۲$، از تساوی‌های $|H|=|K|$ و $|Z(H)|=|Z(K)|$ داریم $\alpha+\beta=\alpha'+\beta'$ و $\beta-\gamma=\beta'-\gamma'$. از لم ۳.۱ داریم $\mathrm{ctv}(H)=\mathrm{ctv}(K)$، بنابراین بایستی داشته باشیم $\alpha=\alpha'$ که ازاینجا تساوی‌های $\beta=\beta'$ و $\gamma=\gamma'$ به دست می‌آیند. اثبات عکس این حالت بدیهی است.

(۴) فرض کنید $\mathrm{Type}(H)=۱$ و $\mathrm{Type}(K)=۲$. چون $|H|=|K|$ و $|Z(H)|=|Z(K)|$، پس داریم $\alpha+\beta=\alpha'+\beta'$ و $\alpha+\beta-۲\gamma=\beta'$ که نتیجه می‌دهد $\alpha'=۲\gamma$. از لم ۳.۱ داریم $\mathrm{ctv}(H)=\mathrm{ctv}(K)$ درنتیجه $۲\leq \alpha'-۱$ یعنی $۳\leq\alpha'$؛ بنابراین وقتی‌که گروه H نا آبلی باشد $\gamma=۱$ و $\alpha=۲$ پس $\gamma\neq ۰$. برعکس، اگر $\gamma=۱$، $\alpha'=۲$ و $\beta'=\alpha+\beta-۲$، آنگاه:

$$H/Z(H)\cong K/Z(K)\cong \mathbf{Z}_۲\times\mathbf{Z}_۲$$

و به‌سادگی می‌توان نشان داد که برای همه $z\in Z(H)$ نگاشت:

$$\theta: H\setminus Z(H)\to K\setminus Z(K)$$

که اعضاء az، bz، abz را به ترتیب به مقادیر $a'\xi(z)$، $b'\xi(z)$ و $a'b'\xi(z)$ می‌نگارد یک یکریختی بین Γ_H و Γ_K به وجود می‌آورد.

(۵) حالت‌های $\mathrm{Type}(H)=۲$ و $\mathrm{Type}(K)=۳$ را در نظر بگیرید. ازآنجایی‌که تساوی‌های $|H|=|K|$ و $|Z(H)|=|Z(K)|$ برقرار هستند، داریم $\alpha+\beta=\alpha'+\beta'$ و $\beta=\beta'-\gamma'+۱$. همین‌طور از لم ۳.۱ داریم $\mathrm{ctv}(H)=\mathrm{ctv}(K)$ که از اینجا به دست می‌آوریم $\gamma'+۱=\min\{۲,\ \alpha-۱\}\leq ۲$، پس $\gamma'\leq ۱$. چون K نا آبلی است $\gamma\neq ۰$ به‌طوری‌که $\gamma'=۱$ و $\alpha\geq ۳$؛ بنابراین $\beta=\beta'$ و درنتیجه $\alpha=\alpha'$. برعکس، اگر $\alpha=\alpha'\geq ۳$، $\beta=\beta'$ و $\gamma'=۱$ در این صورت نگاشت:

$$\theta: H\setminus Z(H)\to K\setminus Z(K)$$

با تعریف $\theta(a^ib^jz)=a'^ib'^j\xi(z)$ برای همه $x=a^ib^jz\in H\setminus Z(H)$ یک یکریختی از Γ_H به Γ_K خواهد شد.

(۶) برای آخرین حالت، فرض کنید $\mathrm{Type}(H)=۱$ و $\mathrm{Type}(K)=۳$. چون $|H|=|K|$ و $|Z(H)|=|Z(K)|$ داریم $\alpha+\beta=\alpha'+\beta'$ و $\alpha+\beta-۲\gamma=\beta'-\gamma'+۱$ که ازاینجا نتیجه می‌شود $\alpha'-۱+\gamma'=۲\gamma$. همین‌طور از تساوی $\mathrm{ctv}(H)=\mathrm{ctv}(K)$ و لم ۳.۱ تساوی‌های $\gamma=\gamma'+۱$ و $\alpha'-۱=\gamma'$ به دست می‌آیند. با توجه به روابط فوق تساوی $\gamma=\gamma'$ حاصل می‌شود که این‌یک تناقض است.

نتایج

اثبات شد که حدس ۱ مطرح‌شده در [۷] برای دو گروه متادوری از توان اول برقرار است. برای بررسی حدس ۲، شرایط لازم و کافی یکریختی دو گروه متادوری نا آبلی با توان اول و یکریختی گراف‌های ناجابه‌جایی وابسته به آنها را معین کردیم. همچنین، نشان دادیم $p-$گروه‌های غیریکریخت با گراف‌های ناجابه‌جایی یکریخت وجود دارند.

References

[1] Nikandish, R. (2021). Investigating the metric dimension of an intersection graph in a commutative ring. *Karafan Quarterly Scientific Journal*, *17*(4), 35-44. https://doi.org/10.48301/kssa.2021.128394

[2] Miraftab, B., & Nikandish, R. (2019). Co-maximal graphs of two generator groups. *Journal of Algebra and Its Applications*, *18*(04), 1950068. https://doi.org/10.1142/s0219498819500683

[3] Akbari, S., Miraftab, B., & Nikandish, R. (2017). Co-maximal Graphs of Subgroups of Groups. *Canadian Mathematical Bulletin*, *60*(1), 12-25. https://doi.org/10.4153/CMB-2016-026-0

[4] Shaveisi, F. (2017). The central vertices and radius of the regular graph of ideals. *Transactions on Combinatorics*, *6*(4), 1-13. https://doi.org/10.22108/toc.2017.21472

[5] Aalipour, G., Akbari, S., Cameron, P., Nikandish, R., & Shaveisi, F. (2016). On the Structure of the Power Graph and the Enhanced Power Graph of a Group. *Electronic Journal of Combinatorics*, *24*(3). https://doi.org/10.37236/6497

[6] Aalipour, G., Akbari, S., Nikandish, R., Nikmehr, M. J., & Shaveisi, F. (2012). On the coloring of the annihilating-ideal graph of a commutative ring. *Discrete Mathematics*, *312*(17), 2620-2626. https://doi.org/10.1016/j.disc.2011.10.020

[7] Abdollahi, A., Akbari, S., & Maimani, H. R. (2006). Non-commuting graph of a group. *Journal of Algebra*, *298*(2), 468-492. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2006.02.015

[8] Darafsheh, M. R. (2009). Groups with the same non-commuting graph. *Discrete Applied Mathematics*, *157*(4), 833-837. https://doi.org/10.1016/j.dam.2008.06.010

[9] Neumann, B. H. (1976). A problem of Paul Erdös on groups. *Journal of the Australian Mathematical Society*, *21*(4), 467-472. https://doi.org/10.1017/S1446788700019303

[10] Abdollahi, A., & Shahverdi, H. (2012). Characterization of the alternating group by its non-commuting graph. *Journal of Algebra*, *357*(1), 203-207. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2012.01.038

[11] Abdollahi, A., & Shahverdi, H. (2014). Non-Commuting Graphs of Nilpotent Groups. *Communications in Algebra*, *42*(9), 3944-3949. https://doi.org/10.1080/00927872.2013.798414

[12] Ahanjideh, N. (2013). On the thompson's conjecture on conjugacy classes sizes. *International Journal of Algebra and Computation*, *23*(01), 37-68. https://doi.org/10.1142/s0218196712500774

[13] Darafsheh, M. R., & Yousefzadeh, P. (2013). Characterization of the symmetric group by its non-commuting graph. *International Journal of Group Theory*, *2*(2), 47-72. https://doi.org/10.22108/ijgt.2013.1920

[14] Zhang, L., & Shi, W. (2010). Recognition of some simple groups by their noncommuting graphs. *Monatshefte für Mathematik*, *160*(2), 211-221. https://doi.org/10.1007/s00605-009-0097-z

[15] Solomon, R. M., & Woldar, A. J. (2013). Simple groups are characterized by their non-commuting graphs. *Journal of Group Theory*, *16*(6), 793-824. https://doi.org/10.1515/jgt-2013-0021

[16] Abdollahi, A., Akbari, S., Dorbidi, H., & Shahverdi, H. (2013). Commutativity Pattern of Finite Non-Abelian p-Groups Determine Their Orders. *Communications in Algebra*, *41*(2), 451-461. https://doi.org/10.1080/00927872.2011.627075

[17] Darafsheh, M. R., & Yousefzadeh, P. (2012). Some results on characterization of finite group by non commuting graph. *Transactions on Combinatorics*, *1*(2), 41-48. https://doi.org/10.22108/toc.2012.1180

[18] Beuerle, J. R. (2005). An Elementary Classification of Finite Metacyclic p-Groups of Class at Least Three. *Algebra Colloquium*, *12*(04), 553-562. https://doi.org/10.1142/s1005386705000519

[19] King, B. W. (1973). Presentations of metacyclic groups. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, *8*(1), 103-131. https://doi.org/10.1017/S0004972700045500

[20] Moradipour, K. (2018). Conjugacy Class Sizes and n-th Commutativity Degrees of Some Finite Groups. *Comptes rendus de l academie bulgare des sciences*, *71*(4), 453-459. https://doi.org/10.7546/CRABS.2018.04.02